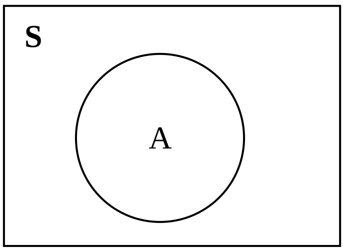
1. Ruang Sampel dan Peristiwa

1. Ruang Sampel

Definisi
Ruang sampel (*Sample Space*), S : totalitas semua hasil yang mungkin dari sebuah percobaan. Titik sampel atau outcome : elemen dari tiap sel. Peristiwa/kejadian (Event) : kumpulan satu atau beberapa titik sampel.

Ruang sampel dan peristiwa, sering dihubungkan dengan teori himpunan (Set), yaitu bahwa ruang sampel dan peristiwa dapat digambarkan sebagai Diagram Venn. Sebagai contoh, di dalam sebuah ruang sampel S terdapat sebuah peristiwa A, digambarkan dalam Diagram Venn diperoleh :



Gambar 1. Diagram Venn

2. Aturan Peluang

Definisi
Jika dalam ruang sampel S dengan anggota sebanyak titik sampel, atau N(S) = n terdapat peristiwa E dengan anggota sebanyak x titik sampel, atau N(E) = s. Maka peluang E terjadi,

$$P(E) = [N(E)]/[N(S)] = x/n$$

Definisi

Peluang terjadi sebuah peristiwa E adalah proporsi frekuensi terjadinya E (dalam jangka panjang) di antara peristiwa lain yang mungkin terjadi

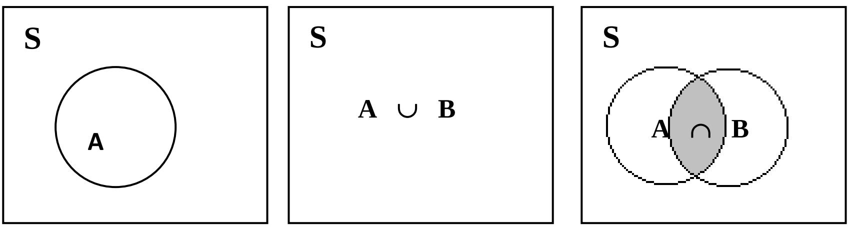
Aksioma :

1. $0 \leq P(E) \leq 1$ untuk setiap peristiwa dalam S
2. $P(S) = 1$
3. Jika A dan B dua peristiwa dalam S yang saling bebas, maka peluang A atau B terjadi adalah,
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Misal, A dan B adalah dua peristiwa dalam S. Hubungan yang mungkin terajadi antara peristiwa A dan peristiwa B adalah :

1. Komplementer, jika B menyatakan "terjadi bukan peristiwa A (A^c)"
2. Bersyarat (kondisional), jika "terjadinya B menjadi syarat terjadinya A ($A|B$) atau sebaliknya.
3. Saling bebas (Independent), jika "terjadi atau tidak terjadinya peristiwa B tidak mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya peristiwa A, atau sebaliknya"
4. Saling bebas (Mutually Exclusive), jika "terjadinya B mencegah terjadinya A atau sebaliknya (A dan B tidak bisa terjadi secara bersamaan). Jadi A atau B ($A \cup B$) saja"
5. Inklusif, jika "A terjadi atau B terjadi atau keduanya terjadi ($A \cap B$)"

Diagram Venn berikut menyatakan hubungan diatas, yaitu komplementer, $A \cup B$ dan $A \cap B$



Gambar 2.a Gambar 2.b Gambar 2.c

Dalam definisi peluang di atas, terdapat kata "anggota" yang merupakan jumlah titik sampel dari sebuah ruang sampel dan peristiwa. Sehubungan dengan hal tersebut, berikut ini di kemukakan beberapa teori untuk menetukan banyaknya cara yang mungkin terjadi dari sebuah ruang sampel atau peristiwa.

Contoh 1

Jika dua buah dadu (bermata : 1,2, … , 6) dilemparkan satu kali, makasemua hasil (dari mata dadu yang nampak) yang mungkin ada 36 hasil yaitu (1,1) yang menyatakan : "kedua dadu menampakkan muka 1", (1,2) yang menyatakan "dadu pertama nampak mata 1 dan dadu kedua nampak mata 2", dan seterusnya (lihat Tabel 1).

Tabel 1 Ruang Sampel Percobaan Dadu

Mata Dadu ke-1	Mata Dadu ke-2					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) A : nampak jumlah mata tujuh, maka
   A : {(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (1,6)}$\rightarrow$N(A)=6 sehingga, P(A)=6/36=1/6
b) B : nampak jumlah mata selain tujuh, maka A dan B saling berkomplemen dengan,
   B : $A^c \rightarrow$ N(B) = 30 sehingga, P(B) = 1 – P(A) = 5/6
c) C : nampak jumlah mata 7 atau jumlah mata 3
   Misal, A : nampak jumlah mata 7 dan F : nampak jumlah mata 3, maka
   C = ($A \cup F$) dimana A dan F mutually exclusive (saling bebas) dengan,
   N(A) = 6 ; P(A) = 6/36 = 1/6
   F : {(1,2) (2,1)}$\rightarrow$ N(F) = 2 sehingga, P(F) = 2/36 = 1/18

Maka, $P(C) = P(A \cup F) = P(A) + P(F) = 2/9$

d) D : nampak jumlah mata 7 atau nampak mata 2 dari dadu ke-1
Misal, A : nampak jumlah mata 7 dan F : nampak mata 2 dari dadu ke-1, maka
$D = P(A \cup F)$ dimana A dan F berhubungan inklusif dengan,

$$N(A) = 6 \; ; \; P(A) = 6/36 = 1/6$$

F : {(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)}$\rightarrow$ $N(F) = 6$, $P(F) = 6/36 = 1/6$
Dan $E \cap F$; {(2,5)} $\rightarrow$ $N(E \cap F) = 1$ sehingga $P(E \cap F) = 1/36$

Maka, $P(D) = P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 7/36$

Dalil 1. Jika himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_k$ masing-masing beranggota $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elemen, maka ada sebanyak $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ cara yang dapat dilakukan untuk memilih, pertama : satu elemen A_1, kedua : satu elemen $A_2, \ldots$, terakhir : satu elemen A_k

Dalil 2. Jumlah permutasi dari r objek yang dipilih dari n objek yang berbeda adalah

P_r^n (n permutasi r) = n! / (n-r)!

Dalil 3. Banyaknya cara memilih r objek dari n objek yang berbeda adalah,

C_r^n (n kombinasi r) = n! / [n! (n-r)!]

Dimana, n! = n(n-1)(n-2) … 1 dan 0!=1 (aksioma)

Perbedaan antar Permutasi dan Kombinasi adalah : Dalam Permutasi, urutan objek dibedakan; sedangkan dalam Kombinasi, urutan objek yang dipilih tidak dibedakan.

Contoh.2

Jika 3 dari 20 ban adalah cacat dan 4 ban diambil secara acak untuk diperiksa, berapa peluang terambil (terdapat) ban cacat ?

Penyelesaian

Diketahui : n = 20, d (ban cacat) = 3 dan g (ban baik) = 17

Misal, S : banyak cara yng mungkin "mengambil 4 dari 20 ban"

A : banyak cara yang mungkin " dalam 4 : 1 cacat dan 3 baik"

= (banyak cara yang mungkin terambil 1 cacat dari 3 cacat) x (banyak cara yang mungkin terambil 3 baik dari 17 baik)

Maka,

N(S) = $\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{20!}{4!.6!}$ = 4845 dan

N(A) = $\dfrac{3!}{1!.2!} x \dfrac{17!}{13!.14!}$ = 2040, sehingga P(A) = $\dfrac{2040}{4845} = \dfrac{8}{19}$ ≈ 0,42

Contoh 3

a) Berapa kelompok yang mungkin terpilih 3 orang assisten dari 9 calon

b) Berapa kelompok yang mungkin terpilih 2 orang assisten fisika dari 5 calon dan 3 orang assisten kimia dari 6 calon ?

Penyelesaian

a) Dengan kombinasi dimana n = 9 dan r = 3 diperoleh

$$C_3^9 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9x8x7x6!}{3x2x1x6!}$$ = 84 kelompok

b) Untuk assisten fisika dimana n = 5 dan r = 2 dengan kombinasi diperoleh

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5x4x3!}{2x1x3!}$$ = 10 kelompok

Untuk assisten fisika dimana n = 6 dan r = 3 dengan kombinasi diperoleh

$$C_3^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6x5x4x3!}{3x2x1x3!}$$ = 20 kelompok

Selanjutnya dengan multifikasi diperoleh banyak kelompok yang mungkin yang terdiri dari assisten fisika dan assisten kimia = 10 x 20 = 200 kelompok

Dalil 4. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_k$ adalah k buah peristiwa yang saling bebas dalam sebuah ruang sampel S maka, peluang A_1 atau A_2 atau … , atau A_k terjadi adalah,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

Dalil 5. Jika A adalah sebuah peristiwa dalam ruang sampel terbatas S, maka P(A) sama dengan jumlah dari peluang titik-titik sampel anggota A.

Dalil 6. Jika A dan B adalah dua peristiwa dalam ruang sampel S maka, peluang A atau B kedua-duanya terjadi adalah

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Jika A dan B saling bebas maka, peluang A dan B terjadi bersama-sama, $P(A \cap B) = 0$.

Dalil 7. Jika A adalah sebuah peristiwa dalam ruang sampel S maka peluang komplemen A (bukan A, A^c) terjadi adalah,

$P(A^c) = 1 - P(A)$

Contoh 4

Dalam sebuah survey di suatu kota terungkap bahwa 87% warga memiliki TV-Warna, 36% memiliki TV-BW dan 29 % memiliki keduanya. Jika pada suatu saat, kita bertemu dengan seorang warga daerah itu, berapa peluang bahwa dia adalah pemilik TV-Warna atau TV-BW atau keduanya.

Penyelesaian

Misal, A : memiliki TV-Warna dan B : memiliki TV-BW

$P(A) = 0{,}87$; $P(B) = 0{,}36$ dan $P(A \cap B) = 0{,}29$

Ditanya : berapa $P(A \cup B)$?

Jawab : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,87 + 0,36 - 0,29 = 0,94$

Definisi

Jika A dan B adalh dua peristiwa dalam ruang sampel S dengan $P(B) \neq 0$ maka, peluang bersyarat A relatif terhadap B adalah,

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ atau,

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$ jika $P(A) \neq 0$

$\quad = P(B) \times P(A|B)$ jika $P(B) \neq 0$

Jika A dan B saling bebas maka, $P(A|B) = P(A)$ dan $P(B|A) = P(B)$ sehingga $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Contoh 5

Peluang sebuah sistem komunikasi akan memiliki daya sensor tinggi 0,81 dan peluang akan memiliki daya sensor dan akurasi 0,18. Berapa peluang sebuah sistem akan memiliki daya sensor tinggi jg memiliki akurasi tinggi

Penyelesaian

Misal, A : memiliki sensor tinggi dan B : memiliki akurasi tinggi

$P(A) = 0,81$; dan $P(A \cap B) = 0,18$

Ditanya : berapa $P(A|B)$?

Jawab : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,81} = \dfrac{2}{9}$

3.Teorema Bayes

Aturan perkalian umum, sangat berguna untuk menyelesaikan persoalan dimana, hasil akhir dari sebuah percobaan tergantung pada berbagai tahap sebelumnya.

Dalil 8. Jika $B_1, B_2, \ldots, B_n$ adalah n peristiwa yang saling bebas, dimana salah satu diantaranya harus terjadi maka,

$$\mathbf{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ .\ \mathbf{P(A \mid B_i)}$$

Teorema Bayes :

Jika $B_1, B_2, \ldots, B_n$ adalah *n* peristiwa bersyarat, dimana salah satu diantaranya harus terjadi maka,

$$P(B_r \mid A) = \frac{P(A).P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A \mid B_i)} \quad \text{untuk } r = 1,2, \ldots, \text{atau } n$$

Contoh 6

Sebuah mesin tersusun dari 20% komponen P, 60% komponen Q, 15% komponen R, dan 5%, komponen S. Berdasarkan pengalaman (jika mesin rusak), 5% karena komponen P rusak, 10% karena komponen Q rusak, 10% karena komponen R rusak, dan 5% karena komponen S rusak. Jika suatu saat terjadi mesin rusak, berapa peluang bahwa kerusakan mesin tersebut akibat rusaknya komponen P ?

Penyelesaian :

Misal B_1 = komponen P ; B_2 = komponen Q ; B_3 = komponen R ;
B_4 = komponen S, dan A ; peristiwa mesin rusak, maka :
$P(B_1) = 0{,}20$; $P(B_2) = 0{,}60$; $P(B_3) = 0{,}15$; dan $P(B_4) = 0{,}05$
$P(A \mid B_1) = 0{,}\ 05$; $P(A \mid B_2) = 0{,}10$; $P(A \mid B_3) = 0{,}10$; dan $P(A \mid B_4) = 0{,}\ 05$

Ditanya : berapa $P(B_1 \mid A)$?

Jawab : menggunakan Teorema Bayes,

$$P(B_r \mid A) = \frac{P(A).P(A \mid B_r)}{\sum P(B_i)P(A \mid B_i)} \leftrightarrow P(B_1 \mid A) = \frac{P(A).P(A \mid B_1)}{\sum P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

$$P(B_1 \mid A) = \frac{0{,}20x0{,}05}{0{,}20x0{,}05 + 0{,}60x0{,}10 + 0{,}15x0{,}10 + 0{,}05x0{,}05} = 0{,}114$$

Jadi, peluang mesin rusak akibat rusaknya komponen P = 0,114 atau 11,4%.

4.Ekspektasi Matematis

Definisi

Jika peluang memperoleh sejumlah a_1, a_2, …, atau a_k adalah p_1, p_2, …, dan p_k maka ekspektasi didefinisikan sebagai,

$$E = a_1\, p_1 + a_2\, p_2 + \ldots + a_k\, p_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\, p_i$$

Contoh 7

Sebuah distributor akan memperoleh laba dari sejenis produk sebesar : \$20 jika produk dikirim dari pabrik tepat waktu dan dalam keadaan utuh (kondisi 1), \$18 jika produk dikirim dari pabrik tapi tidak tepat waktu (kondisi 2), \$8 jika produk tidak dikirim dari pabrik meskipun tepat waktu dan dalam keadaan utuh (kondisi 3). Berapa ekspektasi laba yang diharapkan diperoleh distributor tersebut jika 70% produk dikirim dalam kondisi 1, 10% dikirim dalam kondisi 2 & 20% dalam kondisi 3 ?

Penyelesaian :

Diketahui : a_1 = \$20, a_2 = \$18, a_3 = \$8, p_1 = 0,70, p_2 = 0,10 dan p_3 = 0,20.
Menggunakan aturan ekspektasi matematis diperoleh,
Ekspektasi ≡ E = 0,70 x \$20 + 0,10 x \$12 + 0,20 x \$8 = \$17,4

Latihan

1. Sebuah mata uang dilempar sampai dengan diperoleh hasil nampak dua angka secara berurutan. Tentukan ruang sampel dari percobaan ini

2. Sebuah kotak berisi 3 bola : merah, hijau dan biru. Sebuah percobaan dilakukan dengan mengambil sebuah bola kemudian disimpan lagi dan kemudian diambil lagi sebuah bola.
   a) Tentukan ruang sampel dari percobaan ini !
   b) Berapa peluang setiap titik sampel ?
3. Tiga dadu dilempar. Berapa peluang nampak dua mata yang sama ?

4. Seorang pengawas bangunan biasa melakukan pemeriksaan pada hari Senin, Selasa, Rabu, atau Kamis jam 08, jam 13, atau jam 14. Tentukan seluruh jadwal pemeriksaan yang mungkin dapat dipilih oleh pengawas

5. Sebuah optik memiliki 6 lensa cekung, 4 lensa cembung, dan 3 prisma. Berapa cara atau pajangan yang mungkin yang terdiri dari 1 lensa cekung, 1 lensa cembung dan 1 lensa prisma ?

6. Satu set daftar pertanyaan (untuk survey pasar) terdiri dari 8 pertanyaan yang masing-masing terdiri dari 3 pilihan jawaban. Berapa komposisi jawaban yang mungkin yang akan diperoleh ?

7. a) Ada 5 finalis ratu kecantikan. Berapa pasangan yang mungkin untuk meraih juara 1, juara 2, dan juara 3 ?
   c) Tentukan alternatif pilihan untuk membangun 2 gudang dari 15 calon lokasi ?

8. Sebuah percobaan menghasilkan 4 peristiwa (A,B,C, dan D) yang saling bebas. Adakah kesalahan dalampernyataan-pernyataan berikut ? Mengapa ?

a) P(A) = 0,38; P(B) = 0,16; P(C) = 0,11 dan P(D) = 0,35
b) P(A) = 0,32; P(B) = 0,27; P(C) = -0,06 dan P(D) = 0,47
c) P(A) = ½; P(B) = ¼; P(C) = 1/8 dan P(D) = 1/16

9. Departemen kepolisian sebuah kota membtuhkan ban baru untukmobil patroli.Berdasarkan pengalaman, ban yang diberikan adalah merk Uniroyal, Goodyear, Michelin, General, Goodrich, atau Amstrong dengan peluang masing-masing 0,17 ; 0,22 ; 0,03 ; 0,29 ; 0,21 ; dan 0,08. Berapa peluang akan diberi ban merk :
   a) Goodyear atau Goodrich ?
   b) Uniroyal, General, atau Goodrich ?
   c) Michelin atau Amstrong ?
   d) Goodyear, General atau Amstrong ?

10. Sebuah konsultan menggunakan mobil yang disewa dari 3 agen, 20% dari agen D, 20% dari agen E, dan 60% dari agen F. Jika berdasarkan pengalaman 10% mobil dari agen D, 12% dari agen E, dan 4% dari agen F bannya gundul, berapa peluang seorang pegawai konsultan tersebut mendapat mobil dinas dengan ban gundul ?

11. Toko A, B, dan C masing-masing mempekerjakan 50, 75, dan 100 pegawai dengan 50%, 60%, dan 70% diantaranya adalah wanita. Dengan asumsi bahwa setiap karyawan memiliki kesempatan dipecat yang sama (kecuali berdasarkan kelamin), jika suatu ketika terjadi pemecatan pegawai toko, berapa peluangbahwa yang dipecat itu adalah pegawai wanita dari toko C ?

2. DISTRIBUSI PROBABILITAS

Definisi

1. Variabel acak (variabel random) adalah sebuah variabel yang nilai atau nilai-nilainya yang mungkin, mempunyai harga peluang atau terjadi/muncul tersendiri. Variabel acak yang nilainya terbilang disebut variabel acak diskrit (variabel diskrit), sedangkan variabel acak yang nilainya terukur disebut variabel acak kontinu (variabel kontinu).
2. Distribusi peluang dari variabel diskrit disebut distribusi diskrit, dan fungsinya disebut fungsi peluang yang umumnya dinotasikan dengan p(x). sedangkan, distribusi peluang dari variabel kontinu disebut distribusi kontinu, dan fungsinya disebut fungsi densitas yang dinotasikan dengan f(x).

1. Distribusi Diskrit

Definisi

Jika variabel diskrit X membentuk distribusi peluang dengan fungsi peluang P(X=x) = p(x) untuk x = 0, 1, …, n, maka haruslah

$0 < p(x) < 1$ untuk x = 0, 1, …, n

$p(x) = 0$ untuk lainnya

$\sum_{i=0}^{n} p(x)$ = p(0) + p(1) + … + p(n) = 1 dengan fungsi distribusi,

$P(X \leq x) = F(x) = \sum_{\forall a \leq x} p(a)$ dan, Rata-rata dan varians,

$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} xp(x)$ = p(1) + 2 p(2) + … + np(n) dan,

Var(X) = σ2 = E(x2) – (E(x))2 dimana,

$E(x2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 p(x)$ = p(1) + 4 p(2) + … + n^2p(n)

Misal, fungsi distribusi X terdefinisi untuk setiap bilangan nyata $-\infty < x < \infty$, yaitu $F(x) = P(X \le x)$, maka F(x) mempunyai sifat-sifat : F(x) adalah fungsi tidak turun dari b, $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$, dan $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

Aturan-aturan peluang diskrit :

1) $P(X>a) = 1 - P(X \le a) = 1 - [p(0) + p(1) + \ldots + p(a)]$
2) $P(X \ge a) = 1 - P(X \le a-1) = 1 - [p(0) + p(1) + \ldots + p(a-1)]$
3) $P(a<X<b) = P[(X \le b-1)] - P(X \le a) = p(a+1) + \ldots + p(b-1)$
4) $P(a \le X<b) = P[(X \le b-1)] - P(X \le a-1) = p(a) + \ldots + p(b-1)$
5) $P(a<X \le b) = P[(X \le b)] - P(X \le a) = p(a+1) + \ldots + p(b)$
6) $P(a \le X \le b) = P[(X \le b+1)] - P(X \le a-1) = p(a) + \ldots + p(b)$

Contoh 1

Sebuah variabel acak X berdistribusi peluang dengan,

$P(x) = \frac{x}{6}$ untuk x = 1, 2 dan 3

$= 0$ untuk x lainnya

Tentukanlah F(x) dan gambarkan kurva p(x) dan F(x) !

Penyelesaian

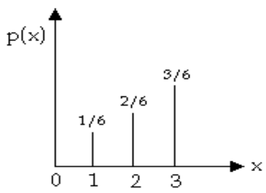
$F(x) = 0$ untuk $x < 1$

$= \frac{1}{6}$ untuk $1 \le x < 2$

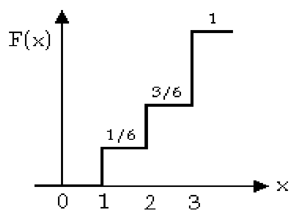
$= \frac{3}{6}$ untuk $2 \le x < 3$

$= 1$ untuk $3 \le x$

kurva p(x) dan F(x) disajian dalam gambar berikut :



Gambar 1 Kurva Distribusi Peluang



Gambar 2 Kurva Fungsi Distribusi

Contoh 2

Sebuah variabel acak X berdistribusi peluang dengan,

$P(x) = \dfrac{x}{15}$ untuk x = 0, 1 , 2, 3, 4, dan 5

= 0 untuk x lainnya

a) Betulkah p(x) disebut distribusi peluang ?
b) Berapa peluang memperoleh X > 5 ? dan berapa untuk X < 0 ?
c) Berapa peluang memperoleh X > 2 ? dan berapa untuk X ≥ 2 ?
d) Berapa peluang memperoleh nilai : $1 < X < 3$; $1 \le X < 3$; $1 < X \le 3$; $1 \le X \le 3$

Penyelesaian

a) agar f(x) merupakan fungsi peluang, maka haruslah p(x) = 1 untuk x = 0, 1 , 2, 3, 4, dan 5

$\sum p(x) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = \frac{0}{15} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{5}{15} = 1$

→ betul

b) Karena p(x) terdefinisi hanya utk nilai 0, 1 , 2, 3, 4, 5 maka P(X < 0) = 0 dan P(X > 5) = 0

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - [p(0) + p(1)] = 1 - (0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}) = \frac{4}{5}$

$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - [p(0) + p(1)] = 1 - (0 + \frac{1}{15}) = \frac{14}{5}$

d) $P(1 < X < 3) = p(2) = \frac{2}{5}$

$P(1 \le X < 3) = p(1) + p(2) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

$P(1 < X \le 3) = p(2) + p(3) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$

$P(1 \le X \le 3) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{2}{5}$

Contoh 3

Sebuah variabel acak X, yaitu jumlah pengunjung yang datang ke sebuah tempat hiburan (orang per menit) berdistribusi peluang dengan fungsi peluang, $p(x) = \dfrac{k}{2^x}$ untuk x = 0, 1 , 2, 3, dan 4

= 0 untuk x lainnya

a) Tentukan nilai k!
b) Berapa peluang pada menit tertentu datang pengunjung 6 orang ?
c) Berapa peluang pada menit tertentu datang pengunjung paling banyak 5 orang ?
d) Berapa peluang pada menit tertentu datang pengunjung paling banyak 5 orang ?
e) Berapa peluang pada menit tertentu datang pengunjung paling sedikit 2 orang ?
f) Berapa rata-rata dan variansnya ?

Penyelesaian

a) Karena p(x) fungsi peluang, maka

$$\sum_{x=0}^{4} p(x) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2^0} + \frac{k}{2^1} + \frac{k}{2^2} + \frac{k}{2^3} + \frac{k}{2^4} = 1 \Leftrightarrow \tfrac{31}{16}k=1 \rightarrow k=\tfrac{16}{31}. \text{ Maka,}$$

$$p(x) = \frac{16}{31(2)^x} \quad \text{untuk } x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$= 0 \quad \text{untuk x lainnya}$$

b) p(6)=0, karena X = 6 di luar nilai yabg didefinisikan untuk p(x)
c) $P(X \le 5) = \{p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4)\} + p(5) = 1+0 = 1$
d) $P(X < 3) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{16}{31}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{28}{31}$
e) $P(X \ge 2) = 1-[\, p(0) + p(1)] = 1 - \frac{16}{31}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{31}$
f) Rata-rata, $\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{4} x\, p(x) = 0p(0) + 1p(1) + 2p(2) + 3p(3) + 4p(4)$

$$= 0 + \tfrac{16}{31}(1 \times ½ + 2 \times ¼ + 3 \times \tfrac{1}{8} + 4 \times \tfrac{1}{16}) = \tfrac{26}{31}$$

Untuk mencari varians, perlu dihitung dahulu

$$E(X^2)= \sum_{x=0}^{4} x^2\ p(x) = 0p(0) + 1p(1) + 4(2) + 9p(3) + 16p(4)$$

$= 0 + \frac{16}{31}(1 \text{ x } ½ + 4 \text{ x } ¼ + 9 \text{ x } \frac{1}{8} + 16 \text{ x } \frac{1}{16}) = \frac{58}{31}$

Maka, Var (X) = $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{58}{31} - (\frac{26}{31}) = \frac{1122}{961}$

Distribusi diskrit yang telah dibahas tadi, dapat dikatakan sebagai distribusi umum (tidak mempunyai nama teoritis yang populer). Berikut ini akan dibahas beberapa distribusi diskrit teoritis.

1.1 Distribusi Binomial

Ciri-ciri percobaan Binomial adalah :

- Hanya menghasilkan (diperhatikan) dua peristiwa atau ketegori, misal S (sukses) dam G (gagal)
- Dilakukan sebanyak n (tertentu) kali
- Tiap percobaan saling bebas, artinya hasil yang muncul pada sebuah percobaan tidak dipengaruhi oleh hasil percobaan sebelumnya dan tidak mempengaruhi hasil percobaan berikutnya
- Peluang terjadinya salah satu peristiwa (misal S) diketahui sebesar π yang bernilai tetap untuk setiap percobaan ($0 < \pi < 1$)

Misal X adalah sebuah variabel yang menyatakan frekuensi terjadi S dalam n, maka nilai-nilai X yang mungkin adalah x = 0,1,2, … , n dan X merupakan variabel diskrit berdistribusi binomial dengan fungsi peluang

$P(X=x) = p(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$ untuk x = 0,1,2, … , n dan $\sum_{x=0}^{n} p(x)$ = 1

= 0 untuk x lainnya

dengan rata-rata, $\mu = n\pi$ danvarians, $\sigma^2 = n\pi(1-\pi)$

Beberapa contoh percobaan dengan dua kategori antara lain adalah : mendapat nilai A dan bukan A dalam ujian, mendapat untung dan tidak untung, dan lain-lain kejadian yang saling berkomplemen.

Untuk keperluan perhitungan, telah tersedia Tabel Fungsi Distribusi Binomial (Tabel pada lampiran). Tabel ini terdiri dari kolom-kolom : n, x, dan p = π. Angka yang tercantum di dalam badan tabel menyatakan F(x) = P(X ≤ x).

Sebagai contoh, untuk n = 10, p = 0,50 pada baris x = 2 terdapat angka 0,0547. Maka, kita peroleh F(2) = P(X ≤ 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0,0547.

Contoh 4

Hitung peluang dari 10 ibu yang melahirkan akan lahir bayi laki-laki sebanyak :

a) Tepat 3 bayi
b) Paling sedikit 3 bayi
c) Paling banyak 3 bayi
d) Kurang dari 3 bayi
e) Lebih dari 3 bayi
f) Antara 2 dan 5 bayi (inklusif)
g) Antara 2 dan 5 bayi (eksklusif)

Penyelesaian

Diketahui : n = 10 (jumlah percobaan), π = (peluang lahir pria = peluang lahir wanita)

Misal, X : jumlah bayi laki-laki yang lahir. Maka, X berdistribusi binomial dengan fungsi peluang :

$$p(x) = \frac{10!}{x!(10-x)!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{10-x} \quad \text{untuk } x = 0,1,2,\ldots,10 \text{ dan } \sum_{x=0}^{10} p(x) = 1$$

$$= 0 \quad \text{untuk x lainnya}$$

Untuk menyelesaikan persoalan ini dapat dilakukan dengan menghitung langsung dari fungsi peluang di atas, atau dengan menggunakan angka-angka yang sudah ada pada Tabel Dist. Binomial. Dengan n = 10 dan p = 0,5.

a) Ditanya : $P(X=3) = p(3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2)$?

Jawab : Dari tabel 1: n = 10; p = 0,5 pada baris x = 3 didapat $P(X \leq 3) = 0{,}1719$ dan, pada baris x = 2 didapat $P(X \leq 2) = 0{,}0547$ sehingga $p(3) = 0{,}1172$. Jadi peluang memperoleh 3 bayi laki-laki = 0,1172

b) Ditanya : $P(X \geq 3)$?

Jawab : $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}0547 = 0{,}9453$

Jadi peluang memperoleh paling sedikit 3 bayi laki-laki = 0,9453.

c) Ditanya : $P(X \geq 3)$?

Jawab : $P(X \geq 3) = 0{,}1719$

Jadi, peluang memperoleh paling banyak 3 bayi laki-laki = 0,1719

d) Ditanya : $P(X<3)$?

Jawab : $P(X < 3) = P(X \leq 2) = 0{,}0547$

Jadi, peluang memperoleh kurang dari 3 bayi laki-laki = 0,0547

e) Ditanya : $P(X>3)$?

Jawab : $P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}1719 = 0{,}8281$

Jadi, peluang memperoleh lebih dari 3 bayi laki-laki = 0,8281

f) Ditanya : $P(2 \leq X \leq 5)$?

Jawab : $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$. Dari Tabel : n =10; p = 0,5 pada baris x = 5 didapat $P(X \leq 5) = 0.6230$ dan pada baris x = 1 didapat $P(X \leq 1) = 0{,}0107$ sehingga, $P(2 \leq X \leq 5) = 0{,}6123$

Jadi, peluang memperoleh antara 2 dan 5 bayi laki-laki (inklusif) = 0,6123

g) Ditanya : $P(2 < X < 5)$?

Jawab : $P(2 < X < 5) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2)$. Dari Tabel : n =10; p = 0,5 pada baris x = 4 didapat $P(X \leq 4) = 0{,}3770$ sehingga, $P(2 < X < 5) = 0{,}3223$

Jadi, peluang memperoleh antara 2 dan 5 bayi laki-laki (eksklusif) = 0,3223

1.2 Distribusi Multinomial

Ciri-ciri percobaan Multinomial adalah :

- Dilakukan sebanyak n kali dan antar percobaan saling bebas, artinya hasil yang muncul pada sebuah percobaan tidak dipengaruhi oleh hasil percobaan sebelumnya dan tidak mempengaruhi hasil percobaan sesudahnya
- Menghasilkan k buah peristiwa atau kategori, misalnya $E_1, E_2, \ldots, E_k$
- Peluang terjadinya tiap peristiwa diketahui sebesar $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$

Misalkan X menyatakan peristiwa $E_1, E_2, \ldots, E_k$ masing-masing sebanyak $x_1, x_2, \ldots, x_k$, maka X adalah variabel diskrit berdistribusi multinomial dengan fungsi peluang

$$P(X=x_i) = p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}(\pi_1)^{x_1}(\pi_2)^{x_2}\ldots(\pi_k)^{x_k} \text{ dengan}$$

$\sum x_i = n$ $\sum x_i = 1$ $0 < \pi < 1$ $i = 1,2, \ldots, k$ $x_i = 0,1, \ldots, n \ \forall \ i$

Contoh 5

Diketahui peluang sejenis lampu proyektor akan hidup :

- ☑ Kurang dari 40 jam = 0,30 : kategori 1
- ☑ Antara 40 – 80 jam = 0,50 : kategori 2
- ☑ Lebih dari 80 jam = 0,20 : kategori 3

Dari 8 lampu jenis ini berapa peluang terdapat : 2 dari kategori 1, 5 dari kategori 2, dan 1 dari kategori 3 ?

Penyelesaian
Diketahui : n = 8; π_1 = 0,30; π_2 = 0,50; π_3 = 0,20
Ditanya : p(2,5,1) ?
Jawab : p(2,5,1) = $\frac{8!}{2!5!1!}(0{,}30)^2(0{,}50)^5(0{,}20)^1$ = 0,0945

1.3 Distribusi Hipergeometrik

Ciri-ciri percobaan hipergeometrik adalah :
Dalam sebuah populasi berukuran N, terdapat D termasuk kategori A. Dari populasi ini diambil sampel berukuran n. Misal X adalah variabel yang menyatakan banyaknya kategori A dalam n, maka X adalah variabel diskrit berdistribusi hipergeometrik dengan fungsi peluang :

P(X=x) = p(x) = $\frac{D!(N-D)!\,n!(N-n)!}{x!(D-x)!(n-x)!(N-D-n+x)!\,N!}$

Dengan rata-rata μ = $\frac{nD}{N}$, dan varians σ^2 = $\frac{nD(N-D)(N-n)}{(N-1)N^2}$

Contoh .6
Dari 20 barang diketahui bahwa 5 diantaranya cacat. Jika 10 barang diperiksa, berapa peluang terdapat 2 barang cacat ?

Penyelesaian
Diketahui : N = 20, D = 5, dan n = 10
Misal X : jumlah barang cacat yang terdapat dalam n
Ditanya : P(X=2) ?
Jawab : P(X=2) = p(2) = $\frac{5!(20-5)!2!(20-10)!}{2!(5-2)!(10-2)!(20-5-10+2)!20!} = \frac{225}{646}$

1.4 Distribusi Geometrik

Ciri-ciri percobaan geometrik adalah :
Dalam percobaan Binomial, jika variabel X menyatakan terjadi S pertama kalinya pada percobaan yang ke x, maka X merupakan variabel diskrit berdistribusi geometrik dengan fungsi peluang :

$P(X=x) = p(x) = \pi(1-\pi)^{x-1}$ untuk $x = 1, 2, \ldots$
$= 0$ untuk x lainnya
Dengan rata-rata $\mu = 1/\pi$

Contoh .7

Diketahui bahwa sebuah mesin potensial menghasilkan produk cacat dengan peluang sebesar 0,05. Berapa peluang seorang pemeriksa akan menemukan produk cacat pertama kalinya pada pemeriksaan ke 3 ?

Penyelesaian

Diketahui : π = 0,05 (peluang terjadi cacat) dan x = 3
Misal pemeriksa menemukan produk cacat pertama kalinya pada pemeriksaan ke x.
Ditanya : P(X = 3) = p(3) ?
Jawab : $P(X = 3) = p(3) = 0,05\ (0,95)^{3-1} = 0,045$

1.5 Distribusi Poisson

Ciri-ciri percobaan Poisson adalah :

- ☑ Dalam lingkup besar ($n \to \infty$), frekuensi terjadinya diharapkan sangat jarang ($\pi \to 0$), dengan rata-rata sebesar λ
- ☑ Frekuensi terjadinya diamati dalam interval waktu tertentu dengan peluang terjadi dalam selang $\Delta t \to 0$ sebesar $\alpha.\Delta t = \lambda$, peluang terjadi peristiwa satu kali atau lebih selama Δt dapat diabaikan, dan kejadian antar selang waktu saling bebas

Misal X adalah variabel yang memenuhi kriteria di atas, maka nilai-nilai X yang mungkin adalah x = 0, 1, 2, …, ∞ dan merupakan variabel diskrit berdistribusi Poisson dengan fungsi peluang :

P(X=x) = p(x) = $\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ untuk x = 0, 1, 2, … dan $\sum_{x=0}^{\infty} p(x)$ = 1

= 0 untuk x lainnya

dengan rata-rata = simpangan baku = λ

Contoh 8

Konsumen yang datang ke sebuah toko (orang/menit) merupakan variabel diskrit berdistribusi Poisson dengan rata-rata 1,5. Berapa peluang pada menit tertentu akan datang konsumen :

a) paling banyak 4 orang
b) Lebih dari 1 orang
c) Paling sedikit 1 orang
d) Minimal 1 orang dan maksimal 4 orang
e) Maksimal 2 orang atau minimal 4 orang

Penyelesaian

Diketahui : X (konsumen sebuah toko) ~ Poisson(λ = 1,5), dengan fungsi peluang :

p(x) = $\dfrac{1{,}5^x e^{-1{,}5}}{x!}$ untuk x = 0, 1, 2, …

= 0 untuk x lainnya

a) Ditanya : $P(X \leq 4)$

Jawab : Dari Tabel Dist. Poisson, pada kolom x = 4 didapat angka 0,981.
maka $P(X \leq 4)$ = 0,981
Jadi, peluang peluang akan datang paling banyak 4 pengunjung = 0,981

b) Ditanya : $P(X > 1)$
Jawab : $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$. Dari Tabel poisson, pada kolom x = 1 didapat angka 0,558. Maka $P(X > 1) = 1 - 0{,}558 = 0{,}442$
Jadi, peluang peluang akan datang lebih dari 1 pengunjung = 0,442

c) Ditanya : $P(X \geq 1)$
Jawab : $P(X \geq 1) = 1 - P(0)$. Dari Tabel poisson, pada kolom x = 0 didapat angka 0,223. Maka $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}223 = 0{,}777$
Jadi, peluang peluang akan datang paling sedikit seorang pengunjung = 0,777

d) Ditanya : $P(1 \leq X \leq 4)$
Jawab : $P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(0) = 0{,}981 - 0{,}223 = 0{,}758$
Jadi, peluang peluang akan datang maksimal 4 dan minimal 2 pengunjung = 0,758

e) Ditanya : $P(X \leq 2 \text{ atau } X \geq 4)$
Jawab : $P(X \leq 2 \text{ atau } X \geq 4) = P(X \leq 2) + P(X \geq 4) = P(X \leq 2) + P(1 - P(X \leq 3))$. Dari Tabel Poisson pada kolom x = 2 didapat angka 0,809 dan pada kolom x = 3 didapat angka 0,934. Maka $P(X \leq 2 \text{ atau } X \geq 4) = 0{,}\ 875$
Jadi, peluang peluang akan datang maksimal 2 atau minimal 4 pengunjung = 0, 875

Teorema Chebysev

Jika X berdistribusi peluang dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ, maka peluang memperoleh sebuah nilai X = x yang bedanya dengan μ minimal sebesar kσ, paling besar k^{-2}
Dalam notasi peluang, teoremaini ditulis :

$$P(\ |x-\mu| \geq k\sigma\ ) \leq \frac{1}{k^2} \text{ atau } P(\ |x-\mu| < k\sigma\ ) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Teorema ini dapat menunjukkan bahwajika simpangan baku semakin kecil, maka peluang memperoleh nilai yang sangat dekat dengan rata-ratanya semakin besar, dan sebaliknya.

Contoh 9

Jumlah pelanggan yang datang ke sebuah dealer mobil pada hari Sabtu, merupakan variabel acak dengan rata-rata 18 orang dan simpangan baku 2,5 orang. Berapa peluang pada suatu Sabtu akan datang pelanggan antara 8 dan 28 orang ?

Penyelesaian

Diketahui : $\mu = 18$, $\sigma = 2{,}5$

Ditanya : $P(8<X<28)$?

Jawab : dengan menggunakan dalil Chebyshev didapat,

$$P(8<X<28) = P(|x-18|<2{,}5k) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-18|}{2{,}5} = k \Rightarrow k = \frac{28-18}{2{,}5} = 4 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{16} = 0{,}9375$$

Maka $P(8<X<28) = 0{,}9375$

Jadi, peluang pada suatu Sabtu tertentu akan datang peluang antara 8 dan 28 orang adalah 0,9375

2.. Distribusi Kontinu

Definisi

Variabel kontinu X dengan harga-harganya $-\infty < x < \infty$ membentuk distribusi peluang denga fungsi densitas f(x). Maka haruslah,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ dengan fungsi distribusi,

$P(X=x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Rata-rata = μ = E(x) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,d(x)$ dan,

Varians = Var(x) = ^{2} = $E(X^2) - [E(X)]^2$ dimana

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$

Aturan-aturan distribusi kontinu :

1. $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$
2. $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$
3. $P(X = a) = f(a) = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$, dimana $\varepsilon > 0$ dan sangat kecil

Contoh 1

Variabel kontinu X berdistribusi peluang dengan fungsi densitas,

f(x) = $c(4x - 2x^2)$ untuk $0 < x < 2$

= 0 untuk x lainnya

a) Nilai c!
b) Peluang memperoleh nilai X antara 0,5 dan 1,5 !
c) Peluang memperoleh lebih dari 0,5 !
d) Peluang memperoleh kurang dari 1 !
e) Peluang memperoleh lebih dari 2 !
f) Peluang memperoleh nilai X tepat sama dengan 1 !
g) Hitung rata-rata dan variansnya !

Penyelesaian

a) Karena f(x) fungsi densitas, maka haruslah :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 c\left(4x - 2x^2\right)dx = c\,\left|2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\right|_0^2 = 1 \Leftrightarrow \tfrac{8}{3}c = 1 \rightarrow c = \tfrac{3}{8}$$

sehingga

f(x) = $\frac{3}{8}(4x - 2x^2)$ untuk $0 < x < 2$

= 0 untuk x lainnya

b) Ditanya : P(0,5 < X < 1,5) ?

Jawab : $P(0{,}5 < X < 1{,}5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right)dx = \frac{3}{8}\left|2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right|_{0,5}^{1,5} = \frac{11}{16}$

c) Ditanya : P(X > 0,5) ?

Jawab : $P(X > 0{,}5) = \int_{0,5}^{2} \frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right)dx = \frac{3}{8}\left|2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right|_{0,5}^{2} = \frac{17}{32}$

d) Ditanya : P(X < 1) ?

Jawab : $P(X < 1) = \int_{0}^{1} \frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right)dx = \frac{3}{8}\left|2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$

e) Ditanya : P(X > 2) ?

Jawab : P(X > 2) = 0 karena X > 2 diluar nilai X yang didefinisikan

f) Ditanya : P(X = 1) ?

P(X = 1) = f(1) = $\int_{0,5}^{1,5} \frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right)$dx = $\frac{11}{16}$

g) Ditanya : μ = E(x) dan $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

Jawab : μ = E(x) = $\int_{0}^{2} x.\frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right)$dx = $\frac{3}{8} \left| 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right|_0^2$ = 1

$\sigma^2 = \int_{0}^{2} x^2.\frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right)dx - (1)^2 = \frac{3}{8} \left| x^4 - \frac{2}{5}x^5 \right|_0^2 - 1 = \frac{1}{5}$

2.1. **Distribusi Normal**

Misal X berdistribusi normal dengan rata-rata μ simpangan baku μ dan simpangan baku σ [X ~N (μ,σ)], maka fungsi densitas X adalah,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}\right) \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

Yang disebut fungsi densitas distribusi normal umum

Kemudian misalkan z = $\frac{x-\mu}{\sigma}$. Maka z akan berdistribusi normal dengan rata-rata 0 (nol) dan simpangan baku 1 [z~N(0,1)] dengan fungsi densitas,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

Yang disebut fungsi densitas distribusi normal baku/standar

Kurva Distribusi Normal mempunyai ciri-ciri sebagai berikut :

- ☑ Berada di atas sumbu datar (x : distribusi umum, z : distribusi baku)
- ☑ Berbentuk simetris seperti lonceng, dengan sumbu simetri pada : x = μ (distribusi umum), z = 0 (distribusi baku), dan terbuka ke bawah
- ☑ Berasymptoot pada $\mu \pm 3\sigma$ (rata-rata ± (3 x simpangan baku))

Untuk keperluan perhitungan, telah tersedia Tabel Fungsi Distribusi Normal Baku (Tabel, Lampiran) dimana angka-angka yang tercantum dalam badan tabel menyatakan luas daerah di bawah kurva distribusi normal baku (dari $-\infty \rightarrow z$) = $P(Z \leq z)$ atau F(z), yaitu peluang memperoleh nilai Z (dari $-\infty \rightarrow z$).

Sebagai contoh, pada baris z = 1,0 di bawah kolom 0,05 terdapat angka 0,8531 yang artinya adalah F(1,05) = P(Z≤1,05) = 0,8531.

Jika distribusi binomial mempunyai n cukup besar ($n \rightarrow \infty$) sedemikian hingga nilai

$\mu = n\pi$ berharga tetap maka, statistik $z = \dfrac{x - n\mu}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$ akan mendekati

distribusi normal dengan rata-rata 0 simpangan baku 1 (distribusi normal baku). Distribusi ini merupakan pendekatan dari distribusi binomial ke distribusi normal. Karena distribusi binomial adalah distribusi diskrit, sedangkan distribusi normal adalah distribusi kontinu, maka diperlukan koreksi kontinuitas untuk nilai x yaitu dengan menambah dan atau menguranginya dengan 0,5.
Banyak sekali contoh variabel berdistribusi normal. Di antaranya adalah tinggi dan berat manusia, isi bersih makanan atau minuman dalam kaleng, hasil panen padi per meter persegi, dan sebagainya.

Contoh 2
Waktu merakit sejenis mesin, berdistribusi normal dengan rata-rata dan simpangan baku masing-masing 12,9 menit dan 2 menit. Berapa peluang seseorang yang sedang merakit mesin tersebut, akan selesai dalam waktu

a) paling lama 11 menit
b) antara 10 dan 15,8 menit
c) tepat 14 menit

Penyelesaian

Misal X adalah waktu merakit, maka X ~ N(12,9;2). Untuk menggunakan Tabel Normal Baku, setiap nilai X ditransformasikan menjadi nilai Z dengan transformasi,

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-12{,}9}{2}$$

a) Ditanya, P(X≤11) ?
   Jawab : dengan transformasi di atas, untuk x = 11 di dapat z $= \frac{11-12{,}9}{2}$ = -0,95 sehingga, P(X≤11) = P(Z ≤ -0,95). Dari Tabel Normal Baku didapat,
   P(X≤11) = P(Z ≤ -0,95) = 0,1711 atau 17,11%
   Jadi peluang perakit akan selesai dalam waktu maksimum 11 menit adalah sebesar 17,11%

b) Ditanya P(10 < X< 15,8) ?
   Jawab : dengan transformasi di atas, untuk x = 10 didapat $z = \frac{10-12{,}9}{2}$ =-1,45 dan untuk x=15,8 didapat $z = \frac{15{,}8-12{,}9}{2}$ = 1,45
   sehingga, P(10 < X< 15,8) = P(-1,45 < Z< 1,45) = 2P(Z< 1,45) – 1.
   Dari Tabel Normal Baku didapat, P(Z < 1,45) = 0,9265 sehingga P(10 < X< 15,8) = 0,8530 atau 85,3 %. Jadi peluang perakit akan selesai dalam waktu antara 10 dan 15,8 menit adalah 85,3 %

c) Ditanya, P(X=14) ?
   Jawab : Untuk pertanyaan ini, nilai X harus dirubah terlebih dulu dengan menambah dan menguranginya dengan 0,5 sehingga
   P(X=14) = P(13,5 < X < 14,5)
   Dengan transformasi di atas, untuk x = 13,5 didapat

z = $\frac{13,5 - 12,9}{2}$ = 0,3 dan untuk x = 15 didapat z = $\frac{14,5 - 12,9}{2}$ = 0,8

sehingga, P(X=14) = P(0,3 < Z < 0,8) = P(Z< 0,8) – P(Z< 0,3). Dari Tabel Normal Baku didapat, P(Z< 0,8) = 0,7881 dan P(Z< 0,3) = 0,6179 sehingga, P(X=14) = 0,1702 atau 17,02%

Jadi peluang perakit akan selesai dalam waktu antara 10 dan 15,8 menit adalah 17,02%

2.2 Distribusi Uniform

Misal X berdistribusi uniform dengan parameter α dan β [X ~ U(α, β), maka fungsi densitas X adalah,

$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$ untuk α < x < β

= 0 untuk x lainnya

dengan rata-rata, $\mu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ dan varians, $\sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$

Contoh 3

Dalam sebuah percobaan, kesalahan yang terjadi ketika menentukan kepadatan suatu bahan, merupakan variabel acak berdistribusi Uniform dengan α = -0,025 dan β = 0,025. Berapa peluang terjadi kesalahan tersebut sebesar :

a) Antara 0,01 dan 0,015
b) Antara –0,012 dan 0,012

Penyelesaian

Misal X : kesalahan yang terjadi ketika menentukan kepadatan suatu bahan maka,

X~U(-0,025 ; 0,025) dengan fungsi densitas.

f(x) = 20untuk α < x < β

= 0 untuk x lainnya

a) Ditanya, P(0,01< X< 0,015) ?

Jawab : $P(0{,}01< X< 0{,}015) = \int_{0,01}^{0,015} 20\,dx = |20x|_{0,01}^{0,015} = 0{,}1$

b) Ditanya, P(-0,012 < X< 0,012) ?

Jawab : $P(-0{,}012< X< 0{,}012) = \int_{-0,012}^{0,012} 20\,dx = |20x|_{-0,012}^{0,012} = 0{,}48$

2.3. Distribusi Exponensial

Misal X berdistribusi eksponensial dengan parameter λ [X~exp(λ)], maka fungsi densitas X adalah (dengan rata-rata μ,dan simpangan baku σ sama , yaitu 1/λ),

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ untuk $x \geq 0$
$= 0$ untuk x lainnya

Misal, dalam mengamati terjadinya kerusakan komponen. Pengamatan dimulai pada saat komponen telah dipakai selama γ satuan waktu, dan X adalah waktu kerusakan komponen, maka X berdistribusi Eksponensial dan parameter (λ dan γ) dengan fungsi densitas,

$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\gamma)}$ untuk $x \geq 0$
$= 0$ untukx lainnya
dengan rata-rata, $\mu = [(1/\lambda) + \gamma]$; dan simpangan baku, $\sigma = 1/\lambda$

Contoh 4

Variabel kontinu X berdistribusi eksponensial dengan fungsi densitas,
$f(x) = ce^{-2x}$ untuk $x > 0$
$= 0$ untuk x lainnya

a) berapa c ?
b) berapa peluang memperoleh nilai X lebih dari 2 ?

Penyelesaian

a) Ditanya, c?

Jawab : Karena f(x) adalah fungsi densitas, maka haruslah

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^\infty ce^{-2x}\,dx = c\ \left| -\tfrac{1}{2}e^{-2x} \right|_0^\infty = 1 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}c=1 \rightarrow c=2,$$

sehingga f(x) = $2e^{-2x}$ untuk x > 0

= 0 untuk x lainnya

c) Ditanya, P(X >2)?

Jawab : $P(X>2) = \int_2^\infty 2e^{-2x}\,dx = 1-\int_0^2 2e^{-2x}\,dx = 1-\left| -e^{-2x} \right|_0^2 = e^{-4}$

Latihan

1. Diketahui 20% dari kerusakan yang terjadi dalam sebuah proses produksi otomatis membutuhkan waktu perbaian lebih dari 2 menit. Berapa peluang tiga dari delapan kali kerusakan yang terjadi dalam proses produksi dalam proses produksi ini, membutuhkan perbaikan
   a) Lebih dari 2 menit ?
   b) Kurang dari 2 menit ?
   c) Berapa peluang maksimal 3 dari 10 kerusakan perlu perbaikan lebih dari 2 menit ?
2. Peluang terjadi hujan pada hari-hari di bulan Juni adalah sebesar 0,05. Berapa peluang pada bulan Juni di tahun tertentu akan terjadi hujan pertama kalinya pada tanggal 10 ?
3. Dengan menggunakan Teorema Chebyschev, berapa peluang nampak mata 6 sebanyak "paling banyak 30 kali atau paling sedikit 105 kali" dari 405 kali lemparan dadu ?
4. Jumlah pesanan yang dilayani oleh sebuah perusaan merupakan variabel acak dengan rata-rata, μ = 142 unit dan simpangan baku, σ = 12 unit. Dengan menggunakan Teorema Chebyschev, berapa peluang pada suatu hari telah dilayani pesanan sebanyak antara 82 dan 202 unit ?

5. Waktu cetak sebuah foto merupakan variabel acak berdistribusi normal dengan rata-rata 16,28 detik dan simpangan baku 0,12 detik. Jika ada seseorang yang mencetak sebuah foto, berapa peluang bahwa dia akan selesai dalam waktu (detik) :
   a) Antara 16,2 dan 16,5
   b) Lebih dari 16,2
   c) Kurang dari 16,35

3. DISTRIBUSI SAMPLING

Dari sebuah populasi N, diambil k sampel acak masing-masing berukuran n_i (i = 1, 2, …, k). Misalkan x_{i1}, x_{i2}, …, x_{in} adalah nilai-nilai pengamatan dari sampel ke-i. Jika setiap sampel dihitung nilai rata-rata dan simpangan bakunya, maka akan didapat rata-rata dan simpangan baku masing-masing sebanyak k buah. Nilai-nilai tersebut akan membentuk distribusi baru, yang disebut distribusi sampling atau distribusi fungsi variabel acak.

Definisi

Segugus pengamatan x_1, x_2, …, x_n disebut sampel acak berukuran n yang diambil dari populasi terhingga berukuran N jika, sampel tersebut dipilih sedemikian rupa sehingga tiap himpunan bagian berukuran n dari populasi tersebut memiliki peluang terpilih yang sama.

Definisi

Sebuah himpunan pengamatan x_1, x_2, …, x_n disebut sampel acak berukuran n yang diambil dari populasi tak terhingga $f(x)$ jika,

1. Tiap xi merupakan variabel acak yang distribusinya bernilai $f(x)$
2. n variabel acak tersebut saling bebas (independent)

3.1 Distribusi Sampling Rata-rata

Jika dari sebuah populasi berukuran N yang mempunyai rata-rata = μ dan varians = σ^2, diambil sampel acak berukuran n, maka rata-rata sampel ($\bar{x}$) akan membentuk distribusi peluang (disebut distribusi sampling rata-rata atau distribusi rata-rata) dengan,

Rata-rata $\qquad \mu_{\bar{x}} = \mu$

Simpangan baku $\qquad \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad$ jika $\dfrac{n}{N} \leq 5\%$ atau,

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \text{jika } \frac{n}{N} > 5\%$$

$\sigma_{\bar{x}}$ Kekeliruan baku rata-rata,

$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ faktor koreksi populasi terhingga

Dalil Limit Pusat

Jika adalah rata-rata dari sampel acak berukuran *n* yang diambil dari populasi berukuran *N*, maka untuk n cukup besar (*n*), statistik,
Berdistribusi N(0,1)

Dalam praktek, pada umumnya dalil ini berlaku untuk $n \geq 30$

Contoh 1

Rata-rata tinggi badan mahasiswa adalah 165 cm dengan simpangan baku 8,4 cm. Jika diambil sampel sebanyak 45 mahasiswa, tentukan peluang dari sampel ini akan diperoleh rata-rata tinggi badan,

a) Antara 160 cm dan 168 cm ?
b) Paling sedikit 166 cm ?

Penyelesaian

Diketahui : μ = 165 cm, σ = 8,4 cm, n = 45 (cukup besar Dalil limit Pusat berlaku)

Jika ukuran populasi tidak disebutkan, maka dianggap N = ∞

a) Ditanya : berapa P(160 < $\bar{X}$ < 168) ?

Jawab : menggunakan DLP didapat z = $\frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(\bar{x}-165)\sqrt{45}}{8{,}4}$

sehingga,

Untuk $\bar{x}$ = 160 $\Rightarrow$ z = $\dfrac{(160-165)\sqrt{45}}{8{,}4}$ = -3,99 dan,

Untuk $\bar{x}$ = 168 $\Rightarrow$ z = $\dfrac{(168-165)\sqrt{45}}{8{,}4}$ = 2,40 sehingga,

P(160 < $\bar{X}$ < 168) = P(-3,99 < Z < 2,40) = P(Z < 2,40) – P(Z < -3,99) = 0,9918 Jadi, peluang memperoleh rata-rata antara 160 cm dan 168 cm = 0,9918

b) Ditanya : berapa P($\bar{X}$ ≥ 166) ?
Jawab : menggunakan DLP didapat

z = $\dfrac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{(\bar{x}-165)\sqrt{45}}{8{,}4}$ sehingga,

Untuk $\bar{x}$ = 166 $\Rightarrow$ z = $\dfrac{(166-165)\sqrt{45}}{8{,}4}$ = 0,80 sehingga

P($\bar{X} \geq 166$) = P(Z ≥ 0,80) = 1 - P(Z < 0,80). Dari Tabel Distribusi Normal Baku didapat,

P(Z < 0,80) = 0,7881 maka, P($\bar{X} \geq 166$) = P(Z ≥ 0,80) = 0,2119

Jadi peluang memperoleh rata-rata antara paling sedikit 166 cm = 0,2119

Dalil 1

Jika $\bar{x}$ adalah rata-rata dari sampel acak berukuran n yang diambil dari populasi berdistribusi normal berukuran N dengan rata-rata μ, simpangan baku σ (diketahui), maka statistik,

z = $\dfrac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}$ jika $\dfrac{n}{N}$ 5% atau,

$$z = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n(N-1)}}{\sigma\sqrt{(N-n)}} \quad \text{jika } \frac{n}{N} > 5\%$$

berdistribusi N(0,1)

Contoh 2

Isi bersih cat merk C, berdistribusi normal dengan rata-rata luas area yang dapat dicat 513,3 m^2/gallon dan simpangan baku 31,5 m^2/gallon. Jika akan digunakan cat merk C sebanyak 40 gallon, berapa peluang akan diperoleh rata-rata hasil pengecetan antara 510 m^2 dan 520 m^2 ?

Penyelesaian

Diketahui : μ = 513,3 m^2/gallon, σ = 31,5 m^2/gallon, n=40, dari sebuah populasi ~ normal

Misal, X adalah rata-rata area yang dapat dicat dengan 1 gallon maka,

Ditanya : berapa P(510 < $\bar{X}$ < 520) ?

Jawab : menggunakan DLP didapat

$$\frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(\bar{x}-513{,}3)\sqrt{40}}{31{,}5} \text{ sehingga}$$

Untuk $\bar{x}$ = 510 $\Rightarrow$ z = $\dfrac{(510-513{,}3)\sqrt{40}}{31{,}5}$ = -0,66 dan,

Untuk $\bar{x}$ = 520 $\Rightarrow$ z = $\dfrac{(520-513{,}3)\sqrt{40}}{31{,}5}$ = 1,34 sehingga,

P(510 < $\bar{X}$ < 520) = P(-0,66 < Z < 1,34) = P(Z<1,34) – P(Z< -0,66). Dari Tabel Distribusi Normal Baku didapat P(Z<1,34) = 0,9099 dan P(Z< -0,66) = 0,2546 maka,

P(510 < $\bar{X}$ < 520) = P(-0,66 < Z < 1,34) = 0,6553.

Jadi, peluang memperoleh rata-rata antara 510 m dan 520 m = 0,6553

Dalil 2

Jika $\bar{x}$ dan s adalah rata-rata dan simpangan baku dari sampel acak berukuran n yang diambil dari populasi berdistribusi normal berukuran N dengan rata-rata μ, simpangan baku σ (tidak diketahui), maka statistik,

t = $\frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{s}$ jika $\frac{n}{N}$ 5% atau, t = $\frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n(N-1)}}{s\sqrt{(N-n)}}$ jika $\frac{n}{N}$ > 5%

Berdistribusi t-Student dengan derajat kebebasan ν = n-1.

Misal X adalah variabel acak berdistribusi t-Student dengan derajat kebebasan n. Maka fungsi densitas X adalah :

$$f(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)\times\sqrt{2n\pi}}\left(1+\frac{1}{n}x^2\right)^{-(n+1)/2} \qquad \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

$$= 0 \qquad \text{untuk x lainnya}$$

Jika $n \to \infty$, nilai t (distribusi t) akan mendekati z (distribusi normal baku). Pendekatan ini umumnya mulai berlaku jika n ≥ 30. Kurva distribusi t-Student, adalah mirip dengan kurva distribusi normal yaitu simetris.

Contoh 3

Produsen sekering merk S menyatakan bahwa jika terjadi kelebihan beban sebanyak 20% maka produknya akan putus dalam waktu (rata-rata) 12,40 menit. Telah diuji 20 unit sekering (diberi beban lebih sebanyak 20%) menghasilkan simpangan baku 2,48 menit. Jika waktu yang dimaksud berdistribusi normal, tentukan berapa peluang akan terjadi putus sekering dalam waktu (rata-rata) lebih dari 10,63 menit !

Penyelesaian :

Diketahui : μ = 12,40 menit, s = 2,48 menit, n = 20 (v = 19), dari sebuah populasi ~ normal. Misal X adalah rata-rata waktu putus sekering maka,

Ditanya : berapa P($\bar{X}$ > 10,63) ?

Jawab :

Menggunakan rumus t-student didapat t

$$= \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s} = \frac{(\bar{x} - 12{,}40)\sqrt{20}}{2{,}48}$$

sehingga,

untuk $\bar{x}$ = 10,63 $\Rightarrow$ t = $\frac{(10{,}63 - 12{,}40)\sqrt{20}}{2{,}48}$ = -3,19 dan,

P($\bar{X}$ > 10,63) = P(T > -3,19) = P(T < 3,19) = 1 - P(T > 3,19).

Dari Tabel Distribusi t-Student (v = 19) didapat, P(T > 2,861) = 0,005 maka, karena 3,19 > 2,861 maka P(T > 3,19) < 0,005 sehingga,

P($\bar{X}$ > 10,63) = P(T > -3,19) = P(T < 3,19) > 0,995

Jadi peluang akan terjadi putus sekering dalam waktu (rata-rata) lebih dari 10,63 menit sangat besar, yaitu > 0,995.

Dari dua populasi (rata-rata : μ_1 dan μ_2, simpangan baku : σ_1 dan σ_2), diambil sampel berukuran n_1 dan n_2. jika s_1 dan s_2 adalah rata-rata dan simpangan masing-masing sampel maka ($\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$) berdistribusi peluang (disebut distribusi sampling dua rata-rata, atau distribusi dua rata-rata dengan,

Rata-rata $\mu = \mu_1 \pm \mu_2$

Simpangan baku $\sigma^2_{gab} = \frac{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}{n_1 n_2}$ jika $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$$\sigma^2_{gab} = \frac{(n_1 + n_2)\sigma^2}{n_1 n_2} \quad \text{jika } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

Dalil 3

Misalkan $\bar{x}_1, s_1 ; \bar{x}_2, s_2$ adalah rata-rata dan simpangan baku dari dua sampel acak berukuran n_1 dan n_2 yang diambil dari dua populasi berdistribusi normal dengan rata-rata dan simpangan baku μ_1, σ_1 dan μ_2, σ_2 simpangan baku

1. Jika $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ dan diketahui maka statistik,

$$z = \frac{\left[(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)\right]\sqrt{n_1 n_2}}{\sigma\sqrt{(n_1 + n_2)}} \sim N(0,1)$$

2. Jika $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ tapi tidak diketahui maka statistik,

$$t = \frac{\left[(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)\right]\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}}{\sqrt{(n_1 + n_2)\left[(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2\right]}} \sim t_V,\ v = (n_1 + n_2 - 2)$$

3. Jika $\sigma_1 \neq \sigma_2$ tapi diketahui maka statistik,

$$z = \frac{\left[(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)\right]\sqrt{n_1 n_2}}{\sqrt{(n_2 s_1^2 + n_1 \sigma_2^2)}} \sim N(0,1)$$

4. Jika $\sigma_1 \neq \sigma_2$ tidak diketahui maka statistik,

$$t = \frac{\left[(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)\right]\sqrt{n_1 n_2}}{\sqrt{(n_2 s_1^2 + n_1 \sigma_2^2)}} \sim t_V,\ v = \frac{\left((s_1^2 / n_1)^2 + (s_2^2 / n_2)^2\right)^2}{\dfrac{(s_1^2 n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2 n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

Contoh 4

Rata-rata tinggi mahasiswa pria (populasi 1) 163 cm dengan simpangan baku 5,2 cm dan, rata-rata tinggi mahasiswa wanita (populasi 2) 152 cm dengan simpangan baku 4,9 cm, keduanya berdistribusi normal. Dari kedua populasi mahasiswa tersebut masing-masing diambil sampel berukuran sama, yaitu 140 mahasiswa. Berapa peluang akan diperoleh rata-rata tinggi mahasiswa pria paling sedikit 10 cm lebih tinggi dari rata-rata tinggi mahasiswi wanita ?

Penyelesaian

Diketahui : $n_1 = n_2 = 140$, $\mu_1 = 163$, $\mu_2 = 152$, $\sigma_1 = 5{,}2$, $\sigma_2 = 4{,}9$, populasi ~ normal

Misal, $\overline{x}_1$: rata-rata tinggi badan sampel pria dan

$\overline{x}_2$: rata-rata tinggi badan sampel wanita, maka

Ditanya : berapa $P\left(\left(x_1 - x_2\right) \geq 10\right)$?

Jawab : karena $\sigma_1 \neq \sigma_2$ tapi diketahui, maka

$$z = \frac{\left[\left(\overline{x}_1 \pm \overline{x}_2\right) - \left(\mu_1 \pm \mu_2\right)\right]\sqrt{n_1 n_2}}{\sqrt{\left(n_2 s_1^2 + n_1 \sigma_2^2\right)}} = \frac{\left[\left(\overline{x}_1 \pm \overline{x}_2\right) - 11\right]\sqrt{140 \times 140}}{\sqrt{140\left(\left(5{,}2\right)^2 + \left(4{,}9\right)^2\right)}}$$

Untuk $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 10$ didapat, $z = \frac{\left[10 - 11\right]\sqrt{140 \times 140}}{\sqrt{140\left(\left(5{,}2\right)^2 + \left(4{,}9\right)^2\right)}}$ = -1,66 sehingga,

$P\left(\left(x_1 - x_2\right) \geq 10\right)$ = P(Z ≥ -1,66) = 1 – P(Z< -1,66). Dari Tabel Normal Baku didapat,

P(Z< -1,66) = 0,0485 sehingga, $P\left(\left(x_1 - x_2\right) \geq 10\right)$ = P(Z ≥ -1,66) = 0,9515

Jadi, peluang rata-rata tinggi mahasiswa pria paling sedikit 10 cm lebih tinggi dari rata-rata tinggi mahasiswa wanita = 0,9515

3.2. Distribusi Sampling Varians

Jika dari populasi normal (varians = σ^2) diambil sampel acak berukuran n, maka varians sampel (s^2) akan membentuk distribusi peluang (disebut distribusi sampling varians, atau distribusi varians). Dan jika dari dua populasi normal (varians : σ_1^2, σ_2^2), diambil sampel berukuran n_1 dan n_2, maka varians sampel s_1^2 dan s_2^2 akan berdistribusi peluang (disebut distribusi sampling dua varians, atau distribusi dua varians)

Dalil 4

Jika s^2 adalah varians dari sampel acak berukuran n yang diambil dari populasi berdistribusi normal dengan simpangan baku σ, maka statistik

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$ (berdistribusi Chi-Kuadrat dengan dk = n-1)

rata-rata $s^2 = (n-1)\sigma^2/n$ varians $s^2 = (2n-1)(\sigma^2/n)^2$
Misal variabel acak X berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat kebebasan n atau dk ≡ ν = n. Maka fungsi densitas X adalah,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2) \times 2^{n/2}} x^{(n/2)-1} - e^{-x/2} \qquad \text{untuk } x > 0$$

$$= 0 \qquad \text{untuk x lainnya}$$

Kurva distribusi Chi-Kuadrat bentuknya miring positif.

Contoh 5

Sebuah perusahaan optik, akan menerima paket kiriman kaca jenis K dimana berdasarkan pengalamannya, diketahui bahwa kaca jenis ini memiliki varians indeks refleksi sebesar 1,26 x 10^{-4}. Pihak perusahaan menetapkan bahwa, kiraman akan ditolak jika varians indeks refleksi dari 20 unit sampel kaca yang dikirimkan menghasilkan varians indeks refleksi lebih dari 2,00 x 10^{-4}. Jika indeks refleksi kaca berdistribusi normal, tentukan peluang bahwa kiriman akan diterima !

Penyelesaian

Diketahui : n = 20, σ = 1,26 x 10^{-4} dan s^2 = 2,00 x 10^{-4}
Misal, X : indeks refleksi kaca dengan varians s^2 maka,
Ditanya : berapa P(varians X < 2,00 x 10^{-4}) ?

Jawab : $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{19s^2}{1,26 \times 10^{-4}}$ sehingga,

Untuk s^2 = 2,00 x 10^{-4} didapat, $\chi^2 = \frac{19 \times 2,00 \times 10^{-4}}{1,26 \times 10^{-4}}$ maka,

P(s^2 < 2,00 x 10^{-4}) = P(χ^2 < 30,2) = 1-P(χ^2 > 30,2). Dari Tabel Distribusi Chi Kuadrat (v = 19) didapat,
P(χ^2 > 30,144) = 0,025 sehingga, P(χ^2 > 30,2) < 0,025
Maka, P(χ^2 < 30,2) = 1- P(χ^2 > 30,2) > 0,975

Jadi, peluang bahwa kiriman akan diterima adalah cukup besar yaitu lebih dari 0,975

Dalil 5

Jika s_1^2 dan s_2^2 adalah varians dari dua dua sampel acak berukuran n_1 dan n_2 yang diambil dari dua populasi berdistribusi normal, maka statistik,

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{(n_1-1),(n_2-2)} \text{ atau berdistribusi } F$$

dengan, derajat kebebasan pembilang, ν_1 = (n_1-1), derajat kebebasan penyebut ν_2 = (n_2-1)

Misal, variabel acak X berdistribusi F dengan derajat kebebasan pembilang n_1 atau $v_1 = n_1$dan derajat kebebasan penyebut n_2 atau $v_2 = n_2$, maka fungsi densitas X adalah,

$$f(x) = \frac{\Gamma[(n_1 + n_2)/2] \times (n_1/n_2)^{n_1/2}}{\Gamma(n_1/2) \times \Gamma(n_2/2)} \frac{(x)^{-[1-n_1/2]}}{\left(1 + \frac{n_1 x}{n_2}\right)^{(n_1+n_2)/2}} \qquad \text{untuk } x > 0$$

$= 0$ untuk x lainnya

Kurva distribusi F berbetuk kurva miring positif.
Dalam penggunaan akan berlaku hubungan

$$F_{(1-\varepsilon);v_1,v_2} = \frac{1}{F_{\alpha;v_2,v_1}}$$

3.3. Distribusi Sampling Proporsi

Dalam sebuah populasi berukuran N, terdapat y anggota diantaranya termasuk kategori A. Maka, proporsi kategori A dalam populasi ini, $\pi = y/N$. Jika dari populasi ini diambil sampel acak berukuran n dan x anggota diantaranya termasuk kategori A, maka proporsi kategori A dalam sampel ini, $p = x/n$ akan membentuk distribusi peluang (distribusi sampling proporsi atau distribusi proporsi) dengan,

Rata-rata $\mu_p = \pi$

Simpangan baku $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ jika $\frac{n}{N} \leq 5\%$ atau,

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)(N-n)}{n(N-1)}} \text{ jika } \frac{n}{N} > 5\%$$

σ_p : kekeliruan baku proporsi, $\frac{N-n}{N-1}$: faktor koreksi populasi terhingga

Dalam dua populasi berukuran N_1 dan N_2, terdapat y_1 dan y_2 anggota diantaranya termasuk kategori A. maka, proporsi A dalam populasi ini masing-masing, $\pi_1 = y_1/N_1$ dan $\pi_2 = y_2/N_2$. Jika dari masing-masing populasi diambil sampel acak berukuran n_1 dan n_2 dimana masing-masing sebanyak x_1 dan x_2 anggota diantaranya termasuk kategori A, maka proporsi kategori A dalam kedua sampel ini masing-masing, $p_1=x_1/n_1$ dan $p_2=x_2/n_2$ akan membentuk distribusi peluang (disebut distribusi sampling dua proporsi atau distribusi dua proporsi) dengan

Rata-rata $\mu_{p_1-p_2} = \nu_{sp} = \pi_1 - \pi_2$

Simpangan baku $\sigma_{p_1-p_2} = \sigma_{sp} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

Dalil 6

Dari populasi dimana terdapat kategori A dengan proporsi sebesar π, diambil sampel acak berukuran n. Jika p adalah proporsi kategori A dalam n, maka untuk $n \to \infty$ (umumnya untun $n \geq 30$) statistik

$$z = \frac{n(p-\pi)}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} \sim N(0,1) \text{ atau berdistribusi normal baku}$$

Contoh 6.

Ada petunjuk kuat bahwa 10% anggota masyarakat daerah D termasuk golongan A. Dari 100 orang anggota masyarakat daerah D yang ditemuai, tentukan berapa peluang terdapat sedikitnya 1 orang termasuk golongan A ?

Penyelesaian

Diketahui n = 100, π = 10% = 0,1

Misal, X : banyaknya golongan A dalam n maka,

Ditanya : berapa $P(X \geq 15) = P(p \geq 0{,}15)$?

Jawab : menggunakan $z = \frac{n(p-\pi)}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} = \frac{100(p-0{,}1)}{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}}$ hingga

Untuk p = 0,15 didapat . $z = \frac{100(0{,}15-0{,}1)}{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}} = 1{,}67$. Maka,

$P(p \geq 0{,}15) = P(Z \geq 1{,}67) = 1 - P(Z < 1{,}67)$ Dari tabel normal baku, $P(Z < 1{,}67) = 0{,}9525$

Sehingga $P(p \geq 0{,}15) = P(Z \geq 1{,}67) = 1 - P(Z < 1{,}67) = 0{,}0475$

Jadi, peluang akan bertemu dengan paling sedikit 15 orang dari golongan A = 0,0475

Dalil 7

Dari data populasi dimana terdapat kategori A dengan proporsi masing-masing sebesar π_1 dan π_2, diambil sampel acak masing-masing berukuran n_1 dan n_2. jia p_1 dan p_2 adalah proporsi kategori A dalam masing-masing sampel maka, untuk n_1 (umumnya untuk $n_1 \geq 30$, i = 1,2) statistik,

$$z = \frac{n_1 n_2 \left[\left(p_1 - p_2\right) - \left(\pi_1 - \pi_2\right)\right]}{\sqrt{n_2 \pi_1 \left(1 - \pi_1\right) + n_1 \pi_2 \left(1 - \pi_2\right)}}$$ ~ N(0,1) atau berdistribusi normal baku

Contoh 7

Menjelang sebuah pemilu, ada petunjuk kuat bahwa 60% calon pemilih akan memilih partai A. Dari dua daerah pemilihan, telah diwawancarai masing-masing sebanyak 300 calon pemilih. Tentukan berapa peluang terjadi selisih persentase yang akan memilih partai A di kedua daerah pemilihan tidak lebih dari 10% !

Penyelsesaian

Diketahui $n_1 = n_2 = 300$, = = 60% = 0,6

Misal, p_1 : proporsi yang akan memilih partai A dalam n_i (i=1,2) maka,

Ditanya $P(|p_1 - p_2| \leq 0{,}1) = P(-0{,}1 \leq (p_1 - p_2) \leq 0{,}1)$?

Jawab : $z = \frac{n_1 n_2 \left[\left(p_1 - p_2\right) - \left(\pi_1 - \pi_2\right)\right]}{\sqrt{n_2 \pi_1 \left(1 - \pi_1\right) + n_1 \pi_2 \left(1 - \pi_2\right)}} = \frac{300^2 \left[\left(p_1 - p_2\right) - 0\right]}{\sqrt{2 \times 300 \times 0{,}6 \times 0{,}4}}$

Sehingga, untuk (p1-p2) = -0,1 didapat $\frac{300^2 \left[-0{,}1\right]}{\sqrt{2 \times 300 \times 0{,}6 \times 0{,}4}}$ = -2,50 dan

untuk (p1-p2) = 0,1 didapat $\frac{300^2 \left[0{,}1\right]}{\sqrt{2 \times 300 \times 0{,}6 \times 0{,}4}}$ = 2,50 sehingga

$P(|p_1 - p_2| \leq 0{,}1) = P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) - P(Z \leq -2{,}5)$, Dari Tabel Distribusi Normal Baku didapat $P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$ dan $P(Z \leq -2{,}5) = 0{,}0062$. Maka $P(|p_1 - p_2| \leq 0{,}1) = 0{,}9876$

Jadi, peluang akan terjadi selisih proporsi pemilih tidak lebih dari 10% = 0,9876

Latihan

1. Dalam populasi yang terdiri atas 3000 objek, 1000 objek diantaranya bernilai 0 dan sisanya bernilai 1.
   a) Hitung μ dan σ !
      Jika dari populasi ini diambil 100 buah sampel masing-masing berukuran 10, kemudian dihitung rata-rata dan variansnya.
   b) Berapa diharapkan rata-rata dan varians dari 100 rata-rata yang diperoleh ?
      Jika ukuran sampel yang diambil adalah 25,
   c) Hittunglah kekeliruan baku rata-rata !
   d) Agara kekeliruan baku rata-rata paling besar 0,05 berapa n seharusnya ?
2. Jika rata-rata berat badan penumpang pesawat dari Dallas ke El Peso berdistribusi normal dengan rata-rata 163 pon dan simpangan baku 18 pon, berapa peluang denan 36 orang penumpang, pesawat akan memiliki beban :
   a) Lebih dari 6000 pon ? c) Antara 5760 pon dan 5976 pon ?
   b) Kurang dari 6500 pon ? d) Antara 6000 pon dan 7000 pon ?
3. Sebuah sampel acak berukuran 10 telah diambil dari populasi berdistribusi normal dengan varians 42,5. Hitung peluang memperoleh simpangan baku sampel antara 3,14 dan 8,94 !
4. Telah dikirimkan 5000 peti gelas dengan kemasan 100 gelas/peti. Dari pengalaman diketahui bahwa dalam pengiriman biasanya trejadi pecah gelas sebanyak 5%. Berapa peti diharapkan berisi gelas utuh paling sedikit 98 buah !
5. Sepuluh persen penduduk sebuah daerah menderita penyakit A. Jika catatan di sebuah rumah sakit (dalam tahun tertentu) ada 900 orang penduduk daerah tersebut yang telah berobat, berapa peluang telah diobati penderita penyakit A sebanyak :
   a) Paling banyak 75 orang ? d) Antara 80 dan 95 orang ?
   b) Lebih dari 98 orang ? e) Tidak lebih dari 100 orang ?
   c) Tidak kurang dari 60 orang ? f) Maksimum 90 orang ?

4. PENGOLAHAN DATA STATISTIK

1 Ukuran Pemusatan

Termasuk ke dalam ukuran ini adalah rata-rata dan modus. Rata-rata terdiri dari rata-rata hitung, rata-rata ukur dan rata-rata harmonik. Karena yang paling banyak dipakai adalah rata-rata hitung, maka dalam diktat ini hanya akan dibahas rata-rata hitung, selanjutnya akan disebut rata-rata. Notasi yang umum digunakan dalam menyatakan rata-rata adalah μ untuk rata-rata populasi dan $\overline{x}$ untuk rata-rata sampel.

1.1 Rata-rata hitung

Misal x_1, x_2, … , x_n adalah n buah data (diskrit atau kontinu) yang belum disajikan dalam DDF (ungrouped data), yang diambil dari sebuah populasi berukuran N dengan data x_1, x_2, … , x_N. Maka rata-rata (μ : populasi , $\overline{x}$: sampel) dihitung dengan rumus :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{dan} \quad \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Sedangkan jika data tersebut telah disajikan dalam DDF (grouped data), rata-rata dihitung dengan rumus berikut ini

Cara panjang, $$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \quad \text{dan} \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Cara pendek, $$\overline{x} = x_0 \, \frac{p}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i C_i$$

x_i = Titik Tengah; x_0 : x_i yang sekelas dengan $C_i = \frac{1}{p}(x_i - x_0) = 0$

Untuk menghitung μ dengan cara pendek, ganti n pada rumus cara pendek dengan N. Dan, melihat rumus cara pendek maka Tabel 2.4 harus ditambah kolom C dan *f*C

1.2 Modus

Dapat digunakan selain untuk mencari rata-rata data kuantitatif, juga dapat digunakan untuk mencari rata-rata data kualitatif. Modus, adalah angka (kuantitatif) atau atribut (kualitatif, misal : baik, cacat) yang paling banyak muncul. Jadi, untuk ungrouped data, modus adalah data/angka yang paling banyak muncul. Jika hanya satu angka atau satu atribut yang paling banyak muncul, disebut unimodial. Jika lebih dari satu, disebut multimodial. Untuk grouped data. Modus dihitung dengan rumus,

$$M_o = b + \frac{pb_1}{b_1 + b_2}$$

b_1 : frekuensi kelas M_o dikurangi frekuensi kelas sebelumnya
b_2 : frekuensi kelas M_o dikurangi frekuensi kelas berikutnya
b_2 : frekuensi kelas M_o dikurangi frekuensi kelas berikutnya
p_2 : frekuensi kelas M_o dikurangi frekuensi kelas berikutnya
Kelas Modus adalah kelas dengan frekuensi terbesar

1.3 Ukuran Letak (Median, Kuartil, Desil dan Persentil)

⇒ Dengan Persentil, data dibagi menjadi 100 bagian yang sama, masing-masing bagian sebesar 1%
⇒ Drengan Desil, data dibagi menjadi 10 bagian yang sama, masing-msing bagian sebesar 10%
⇒ Dengan Kuartil, data dibagi menjadi 4 bagian yang sama, masing-masing bagian sebesar 25%
⇒ Dengan Kuartil, data dibagi menjadi 4 bagian yang sama, masing-masing bagian sebesar 25%

Berdasarkan peran ukuran-ukuran ini maka, terdapat hubungan berikut :

Persentil ke-90 = Desil ke-9
Persentil ke-80 = Desil ke-8
Persentil ke-70 = Desil ke-7
Persentil ke-75 = Kuartil ke-3 (Atas)
Persentil ke-60 = Desil ke-6
Persentil ke-50 = Desil ke-5 = Kuartil ke-2 (Median)
Persentil ke-40 = Desil ke-4
Persentil ke-30 = Desil ke-3
Persentil ke-25 = Kuartil ke-1 (Bawah)
Persentil ke-20 = Desil ke-2
Persentil ke-10 = Desil ke-1

Misal, x_1, x_2, … , x_n adalah n buah data (diskrit atau kontinu). Persentil, Desil, Kuartil, dan Median dihitung dengan rumus yang tercantum pada Tabel 3.1. Untuk ungrouped data, empat ukuran ini dicari setelah data diurut dari data terkecil sampai dengan data terbesar, sedangkan untuk grouped data, rumus pada Tabel 3.1 dapat langsung digunakan.

Tabel 1 Rumus Ukuran-Ukuran Letak

Rumus Ungrouped Data	Nama dan Notasi	Rumus Grouped Data
data ke - $\frac{i(n+1)}{100}$	Persentil, P_i; i = 1,2,…,99	b+ $\frac{p}{f}\left(\frac{i \times n}{100} - F\right)$
data ke - $\frac{i(n+1)}{10}$	Desil, D_i; i = 1,2,…,9	b+ $\frac{p}{f}\left(\frac{i \times n}{10} - F\right)$
data ke - $\frac{i(n+1)}{4}$	Kuartil, K_i; i = 1,2,3	b+ $\frac{p}{f}\left(\frac{i \times n}{4} - F\right)$

data ke - $\frac{(n+1)}{2}$	Median, M_e	b+ $\frac{p}{f}\left(\frac{n}{2}-F\right)$

Untuk dapat menggunakan rumus-rumus dalam Tabel 3.1, perlu dipahami arti dari notasi yang ada di dalam rumus-rumus tersebut, yaitu

Persentil ke-i (P_i) :

- ☑ $\frac{i \times n}{100}$: letak P_i yaitu kelas dengan frekuensi kumulatif ≥ $\frac{i \times n}{100}$
- ☑ b : batas bawah kelas P_i
- ☑ f : frekuensi kelas P_i
- ☑ F : jumlah frekuensi sebelum kelas P_i
- ☑ p : panjang kelas

Desil ke-i (D_i) :

- ☑ $\frac{i \times n}{10}$: letak P_i yaitu kelas dengan frekuensi kumulatif ≥ $\frac{i \times n}{10}$
- ☑ b : batas bawah kelas D_i
- ☑ f : frekuensi kelas D_i
- ☑ F : jumlah frekuensi sebelum kelas D_i
- ☑ p : panjang kelas

Desil ke-i (D_i) :

- ☑ $\frac{i \times n}{10}$: letak P_i yaitu kelas dengan frekuensi kumulatif ≥ $\frac{i \times n}{10}$
- ☑ b : batas bawah kelas D_i
- ☑ f : frekuensi kelas D_i
- ☑ F : jumlah frekuensi sebelum kelas D_i
- ☑ p : panjang kelas

Kuartil ke-i (K_i) :

- ☑ $\frac{i \times n}{4}$: letak P_i yaitu kelas dengan frekuensi kumulatif ≥ $\frac{i \times n}{4}$
- ☑ b : batas bawah kelas K_i
- ☑ f : frekuensi kelas K_i
- ☑ F : jumlah frekuensi sebelum kelas K_i
- ☑ p : panjang kelas

Median (M_e) :

- ☑ $\frac{n}{2}$: letak P_i yaitu kelas dengan frekuensi kumulatif ≥ $\frac{n}{2}$
- ☑ b : batas bawah kelas M_e
- ☑ f : frekuensi kelas M_e
- ☑ F : jumlah frekuensi sebelum kelas M_e
- ☑ p : panjang kelas

1.3 Ukuran Dispersi

1). Varians dan Simpangan Baku

Yang akan di bahas dalam diktat ini adalah simpangan baku dan variansi (varians) karena, dua ukuran dispersi ini yang paling sering digunakan. Hubungan antara simpangan baku dengan varians adalah : "Varians = kuadrat dari Simpangan Baku". Notasi yang umum digunakan untuk simpangan baku adalah σ (sigma) untuk simpangan baku populasi dan s untuk simpangan baku sampel.

Ukuran ini merupakan ukuran statistik yang menunjukkan sampai sejauh mana variabilitas data yang terkumpul. Makin kecil nilai ukuran ini, menunjukkan variabilitas data makin rendah atau dapat dikatakan bahwa data relatif seragam, dan sebaliknya.

Misal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah n buah data (diskrit atau kontinu) yang belum disajikan dalam DDF (ungrouped data), yang diambil dari sebuah populasi berukuran N dengan data $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Maka varians(σ^2 : populasi , s^2 : sampel) dihitung dengan rumus :

Ungrouped data

$$\sigma^2 = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N^2} \quad \text{dan} \quad s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

Grouped data

Cara panjang,

$$\sigma^2 = \frac{N\sum_{i=1}^{N} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} f_i x_i\right)^2}{N^2} \quad \text{dan} \quad s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

Cara pendek,

$$\sigma^2 = p^2 \times \frac{N\sum_{i=1}^{N} f_i C_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} f_i C_i\right)^2}{N^2} \quad \text{dan}$$

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} f_i C_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i C_i\right)^2}{n(n-1)}$$

x: titik tengah, f: frekuensi, dan $C_i = \frac{1}{p}\left(x_i - x_0\right)$

Untuk menghitung simpangan baku, maka jika nilai varians sudah diperoleh maka nilai varians tersebut diakarkan.

1.4. *Angka Baku dan Koefisien Variasi*

Angka baku pada umumnya digunakan untuk membandingkan paling sedikit dua buah nilai. Suatu nilai dikatakan lebih baik dibandingkan dengan nilai lainnya apabila mempunyai angka baku yang lebih beasr atau lebih kecil (tergantung pada permasalahan yang dihadapi). Misal untuk membandingkan dua nilai hasil ujian, tentunya yang memiliki angka baku yang lebih besar yang menyatakan lebih baik. Angka baku didefinisikan dengan rumus :

$$Z = \frac{\{(nilai) - (rata - rata)\}}{simpangan\, baku} = \left(\frac{x - \bar{x}}{s} \right)$$

Koefisien variasi kegunaannya sama dengan angka baku, perbedaan yang mendasar adalah jika angka baku digunakan untuk membandingkan suatu nilai tertentu, sedangkan koefisien variasi digunakan untuk membandingkan keragaman dari suatu individu dibandingkan dengan individu lain. Misalnya dalam pemilihan mesin yang menghasilkan produk serupa, dari dua mesin yang masing masing mempunyai rata-rata dan simpangan tertentu. Mesin yang dipilih adalah yang mempunyai koefisien variasi yang kecil, karena nilai tersebut menunjukkan konsistensi (variabilitas individu). Rumus koefisien variasi didefinisikan sebagai :

$$KV = \left(\frac{Simpangan\, Baku}{Rata - rata} \right) x100\% = \frac{s}{\bar{x}} x100\%$$

1.5. Rata-rata dan Simpangan Baku Gabungan

Misal, telah diambil *k* buah sampel. Kemudian, dari tiap sampel dihitung rata-rata dan simpangan baku. Maka, akan diperoleh *k* buah nilai rata-rata dan k buah nilai simpangan baku. Selengkapnya, dapat dilihat dalam Tabel ;

Tabel Rata-rata dan Simpangan Baku

Sampel Ke	Ukuran	Rata-rata	Simpangan Baku
1	n_1	$\bar{x}_1$	s_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	n_i	$\bar{x}_i$	s_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	n_k	$\bar{x}_k$	s_k
Jumlah	n	-	-

Berdasarkan tabel di atas, rata-rata gabungan dan simpangan baku gabungan dari seluruh sampel dapat dihitung dengan :

$$\bar{x}_{gab} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \quad \text{dan} \quad s_{gab} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)s_i^2}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)}}$$

Contoh 1

Nilai enam kali ulangan Dinda adalah 10, 8, 8, 9, 7, dan 9

a) Tentukanlah nilai rata-rata ulangan Dinda tersebut
b) Tentukanlah varians dan simpangan baku ulangan Dinda
c) Tentukanlah Modus dan Median nilai ulangan Dinda
d) Tentukanlah Kuartil 1 dan Kuartil 3 ulangan Dinda

Penyelesaian

a) $\bar{x} = \dfrac{10 + 8 + 8 + 9 + 7 + 9}{6} = \dfrac{51}{6} = 8{,}5$

Jadi nilai rata-rata ulangan Dinda adalah 8,5

b) n = 6 , $\sum_{i=1}^{6} x_i = 51$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 439$

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{6 \cdot 439 - (51)^2}{6(6-1)} = \frac{33}{30} = 1,1$$

s = $\sqrt{1,1}$ = 1.048809. Jadi variansnya adalah 1,1 sedangkan nilai simpangannya adalah 1.048809

c) Modus (angka yang sering muncul) dari ulangan Dinda adalah 8 dan 9. Sebelum menghitung Median terlebih dahulu data diurutkan dari data terkecil sampai data terbesar. Urutan datanya menjadi 7, 8, 8, 9, 9, 10. Maka, nilai Median ulangan Dinda (karena datanya genap) dilakukan perhitungan menggunakan rumus :
   Median = $\frac{1}{2}(x_3 + x_4) = \frac{1}{2}(8 + 9)$ = 8,5
   Jadi nilai Modus = 8 dan 9. Sedangkan nilai Mediannya = 8,5

d) Letak K_1 = data ke ¼ (n+1) = data ke ¼ (6+1) = data ke 1,75
   Nilai $K_1 = x_1 + 0,75\ (x_2 - x_1) = 7 + 0,75(8 - 7) = 7,75$
   Letak K_3 = data ke ¾ (n+1) = data ke ¾ (6+1) = data ke 5,25
   Nilai $K_3 = x_5 + 0,25\ (x_6 - x_5) = 9 + 0,25\ (10 - 9) = 9,25$
   Jadi nilai Kuartil 1 = 7,75 dan nilai Kuartil 3 = 9,25

Contoh 2

Tinggi badan (cm) 80 mahasiswa sebuah PT disajikan dalam daftar distribusi frekuensi berikut

Tinggi Badan (cm)	Frekuensi (*f*)
154 – 156	8
157 – 159	11
160 – 162	14
163 – 165	20
166 – 168	12
169 – 171	9
172 – 174	6
Jumlah	80

a. Tentukanlah nilai rata-rata tinggi badan mahasiswa
b. Tentukanlah varians dan simpangan baku tinggi badan mahasiswa
c. Tentukanlah Modus dan Median nilai tinggi badan mahasiswa
d. Tentukanlah Kuartil 1 dan Kuartil 3 tinggi badan mahasiswa
e. Tentukanlah Persentil 10 dan 90 tinggi badan mahasiswa
f. Hitunglah Rata-rata antar kuartil tinggi badan mahasiswa

Penyelesaian

Tinggi Badan (cm)	frekuensi (*f*)	Nilai Tengah (x)	f.x	f.x²
154 – 156	8	155	1240	192200
157 – 159	11	158	1738	274604
160 – 162	14	161	2254	362894
163 – 165	20	164	3280	537920
166 – 168	12	167	2004	334668
169 – 171	9	170	1530	260100
172 – 174	6	173	1038	179574
Jumlah	80		13084	2141960

a) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \frac{10384}{80} = 163{,}55$

Jadi rata-rata tinggi badan mahasiswa tersebut adalah 163,55 cm

b) $s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{80.2141960 - (13084)}{80(80-1)} = 163672.2$

s = $\sqrt{163672{,}2}$ = 404.5642

Jadi varians dan simpangan baku tinggi badan mahasiswa masing-masing adalah 163672.2 dan 404.5642

c) $M_o = b + \frac{pb_1}{b_1 + b_2} = 162{,}5 + \frac{3.14}{14 + 12} = 164{,}115385$

Letak Median = data ke n/2 = data ke 80/2 = data ke 40

$$\text{Me} = \text{b}+ \frac{p}{f}\left(\frac{n}{2} - F\right) = 162{,}5 + \frac{3}{20}\left(\frac{80}{2} - 33\right) = 163{,}525$$

Jadi nilai Modus = 164,115385cm dan mediannya = 163,525cm

d) Letak K_1 = data ke n/4 = data ke 80/4 = data ke 20

$$K_1 = \text{b}+ \frac{p}{f}\left(\frac{i \times n}{4} - F\right) = 159{,}5+ \frac{3}{14}\left(\frac{1 \times 80}{4} - 19\right) = 159{,}714286$$

Letak K_3 = data ke 3n/4 = data ke 3 x 80/4 = data ke 60

$$K_3 = \text{b}+ \frac{p}{f}\left(\frac{i \times n}{4} - F\right) = 165{,}5+ \frac{3}{12}\left(\frac{3 \times 80}{4} - 53\right) = 167{,}25$$

Jadi K_1 = 159,714286 cm dan K_3 = 167,25 cm

e) Letak P_{10} = data ke 10 x n/100 = data ke 800/100 = data ke 8

$$P_{10} = \text{b}+ \frac{p}{f}\left(\frac{i \times n}{100} - F\right) = 153{,}5 + \frac{3}{8}\left(\frac{10 \times 80}{100} - 0\right) = 156{,}5$$

Letak P_{90} = data ke 90 x n/100 = data ke 720/100 = data ke 72

$$P_{90} = \text{b}+ \frac{p}{f}\left(\frac{i \times n}{100} - F\right) = 168{,}5 + \frac{3}{9}\left(\frac{90 \times 80}{100} - 65\right) = 170{,}8333$$

Jadi P_{10} = 156,5 cm dan P_{90} = 170,8333 cm

e) Rata-rata antar kuartil

RAK = ½ (K_1+K_3) = ½ (159,714286 + 167,25) = 163.4821

Jadi Rata-rata antar kuartil tinggi badan mahasiswa = 163.4821

Contoh 3

Akan dipilih satu dari dua asisten Lab. Statistika Industri, dengan dasar nilai statistika yang diperolehnya. Calon A, mendapat nilai 7 dalam kelompok yang mempunyai rata-rata 6 simpangan baku 0,7; calon B, mendapat nilai 7,5 dalamkelompok yang mempunyai rata-rata 7 simpangan baku 0,9. Calon mana yang sebaikmya diterima ?

Penyelesaian

Angka baku kedua calon adalah :

$Z_A = \dfrac{x_A - \bar{x}_A}{s_A} = \dfrac{7-6}{0{,}7}$ =1,43 dan $Z_B = \dfrac{x_B - \bar{x}_B}{s_B} = \dfrac{7{,}5-7}{0{,}9}$ = 0,56

Karena $Z_A > Z_B$, maka calon A yang harus dipertimbangkan untuk diterima

Contoh 4

Pengukuran diameter bola, dilakukan dengan dua alat ukur (sejenis tapi berbeda merk). Dengan alat ukur A, hasil pengukuran menghasilkan rata-rata 3,92 mm simpangan baku 0,015 mm; sedangkan dengan alat ukur B rata-rata 1,54 inchi simpangan baku 0,008. Alat ukur mana yang lebih presisi ?

Penyelesaian

$KV_A = \dfrac{s_A}{\bar{x}_A}$ x 100% = $\dfrac{0{,}015}{3{,}92}$ x 100% = 0,38%

$KV_B = \dfrac{s_B}{\bar{x}_B}$ x 100% = $\dfrac{0{,}008}{1{,}54}$ x 100% = 0,52%

Karena $KV_B > KV_A$ maka A lebih presisi dari B.

Contoh 5

Dua sampel telah diambil. Sampel pertama berukuran 10 menghasilkan rata-rata 6 simpangan baku 0,7; sedangkan sampel kedua, berukuran 8 menghasilkan rata-rata 7 simpangan baku 0,9. Hitunglah rata-rata dan simpangan baku gabungan dari kedua sampel ini !

Penyelesaian

Diketahui : n_1 = 10 ; n_2 = 8 ; s_1 = 0,7 ; s_2 = 0,9 ; $\bar{x}_1$ = 6 dan $\bar{x}_2$ = 7. Maka,

$$\bar{x}_{gab} = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{2} n_i} = \frac{10.6 + 8.7}{10 + 8} = 6{,}44$$

$$s_{gab} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2} (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^{2} (n_i - 1)}} = \sqrt{\frac{9(0{,}7)^2 + 7(0{,}9)}{10 + 8 - 2}} = 0{,}794$$

Latihan

1. Berikut diberikan data umur (tahun) dari 23 orang eksekutif yang diperoleh dari sebuah survey. 45 45 46 41 44 44 42 44 48 42 44 45 45 46 43 44 42 44 45 45 44 42 43. Dari data tersebut, hitung : Modus, Median, kuartil (atas, bawah, tengah), desil (ke : 2, 6 dan 8), persentil (ke : 15, 30, 45, 65, 85, dan 95), rata-rata, simpangan baku dan koefisien variasi! Kemudian interpretasikan.

2. Data berikut adalah IQ dari 40calon mahasiswa sebuah perguruan tinggi, yaitu 74 84 79 84 85 90 92 77 76 87 81 81 92 90 93 97 10 106 105 106 116 105 79 82 85 97 92 95 104 107 106 103 116 118 88 97 92 101 104 113.
   a) Sajikan data dalam DDF!
   b) Hitung modus, median, kuartil atas, desil ke-4, dan persentil 55 !
   c) Hitung rata-rata dan simpangan baku dengan cara pendek !
   d) Jika yang akan diterima menjadi mahasiswa adalah 85% peserta yang mempunyai IQ tertinggi, tentukan batas terrendah IQ yang dapat diterima !
   e) Tentukan batas tertinggi dari 65% calon mahasiswa yang memiliki IQ terrendah !

3. Berikut adalah data waktu penyelesaian (menit) suatu pekerjaan dari dua kelompok pekerja.
   Kelompok 1 : 79 78 87 82 82 84 89 99 96 96 97 90 94 93
   Kelompok 2 : 74 85 79 84 85 90 92 77 76 87 81 81 92
   Kelompok mana yang lebih merata kemampuannya !

4. Berikut adalah data nilai pelatihan (skala 0 – 100) Pengendalian Kualitas dari dua kelompok pekerja
   Kelompok 1 : 89 **78** 87 82 82 84 89 90 92 95 92 90 91 93
   Kelompok 2 : **78** 85 79 84 85 90 92 77 76 87 81 81 92
   a) Apakah peserta dengan nilai 78 di kelompok 1 lebih berprestasi dari peserta dengan nilai 78 di kelompok 2 ?
   b) Kelompok mana yang memiliki prestasi lebih merata ?
   c) Hitung rata-rata dan simpangan baku gabungan dari nilai kedua kelompok !

5. Dengan data pada soal nomor 4, ada berapa orang (dari tiap kelompok) yang dapat dipromosikan menjadi Kepala Divisi Quality Control jika yang akan dipertimbangkan adalah 25% dari peserta dengan nilai tertinggi ?

Tabel Z; Luas Daerah Di Bawah Kurva Normal Baku

Angka dalam badan tabel menyatakan nilai $F(z) = P(Z \le z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753

Sumber : Shamblin & Steven

Tabel Z. Luas Daerah Di Bawah Kurva Normal Baku

Angka dalam badan tabel menyatakan nilai *F*(-z) = P(Z ≤ -z) = $\int_{-\infty}^{-z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$

-z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,5	0,00023	0,00022	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00019	0,00018	0,00017	0,00017
-3,4	0,00034	0,00032	0,00031	0,00030	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024
-3,3	0,00048	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00038	0,00036	0,00035
-3,2	0,00069	0,00066	0,00064	0,00062	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050
-3,1	0,00097	0,00094	0,00090	0,00087	0,00084	0,00082	0,00079	0,00076	0,00074	0,00071
-3,0	0,00135	0,00131	0,00126	0,00122	0,00118	0,00114	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247

Sumber : Shamblin & Steven

CARA BACA TABEL-t

JIKA KITA MAU MENGUJI PERBEDAAN DUA KELOMPOK DATA (X1) DAN (X2) YANG SALING INDEPENDENT
MAKA SETELAH DI HITUNG STATISTIK t-hitung
MAKA AMBIL t-Tabel dengan melihat Tabel t berikut;
Misalkan, - Sampel data kelompok-1 = n1 = 10
- Sampel data kelompok-2 = n2 = 12 sehingga total data n = 22
- Gunakan taraf uji 5%, dalam artian kita yakin hasil uji benar 95%

Maka membaca Table-t adalah;
Hitung deajat bebas uji : v = n – 2 = 22 – 2 = 20
Baca baris v = 20, dan kolom 0.05 ==➔ dalam table tercatat : t-tabel = 1,725

TABEL - t Student

v	0,45	0,40	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005
1	0,158	0,325	0,727	1,000	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,142	0,289	0,617	0,816	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,584	0,765	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,569	0,741	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,559	0,727	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,553	0,718	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,549	0,711	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,546	0,706	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,543	0,703	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,542	0,700	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,540	0,697	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,539	0,695	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,538	0,694	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,537	0,692	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,536	0,691	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,535	0,690	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,534	0,689	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,534	0,688	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,533	0,688	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,533	0,687	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,532	0,686	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,532	0,686	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,532	0,685	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,531	0,685	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,531	0,684	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,531	0,684	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,531	0,684	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,530	0,683	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,530	0,683	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,530	0,683	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,126	0,255	0,529	0,681	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,126	0,254	0,527	0,679	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,126	0,254	0,526	0,677	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,126	0,253	0,525	0,675	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586

Sumber : Fruend & Miller, Introduction of Statistic

DAFTAR PUSTAKA

Freund & Miller (1992). *Probability and Statistics for Engineers*, 3rd Ed., Macmillan Publishing Company Singapore.

Iwan Gunawan (1997). Statistika 1. Eka Rama, Bandung.

Paul A. herzberg, (1983). Principles of Statistics. John & Wiley Co. USA.

Roberts V. Hogg & Allent T. Craig, (1978). *Introduction of Mathematical Statistics*. 4th Ed. Macmillan Publishing Co., Inc., New York.

Sheldon M. Ross (1980). *Introduction to Probability Models*. 2nd Ed. Academic Press Inc. London Ltd.

Sudjana, (1995). Metode Statistika, Tarsito, Bandung.

Sudjana, (1991). Desain dan Analisis Eksperimen. Edisi 3, Tarsito, Bandung.

William R. Dillon & Mattew Goldstein, (1984). *Multivariate Analysis : Methods and Applications*. John Wiley & Sons Inc., USA.